103

Descomposición factorial

Suma o diferencia de cubos perfectos

P r o c e d i m i e n t o

1. Se abren dos paréntesis
2. En el primer paréntesis se escribe la suma o la diferencia, según el caso, de las raíces cúbicas de los dos términos
3. En el segundo paréntesis se escribe el cuadrado de la primera raíz, menos (si es una suma de cubos) o más (si es una diferencia de cubos) el producto de la primera raíz por la segunda, mas el cuadrado de la segunda raíz

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Descomponer en dos factores:

1. $1+a^3$

Solución:

$1+a^3 = 1^3 + a^3$ {tiene la forma $a^3 + b^3$}

1: raíz cúbica del primer término

a: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$1+a^3 = (1+a)(1^2 - 1\times a + a^2);$

$\therefore \quad 1+a^3 = (1+a)(1-a+a^2).$

2. $1-a^3$

Solución:

$1-a^3 = 1^3 - a^3$ {tiene la forma $a^3 - b^3$}

1: raíz cúbica del primer término

a: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$1+a^3 = (1-a)(1^2 + 1\times a + a^2);$

$\therefore \quad 1+a^3 = (1-a)(1+a+a^2).$

3. $x^3 + y^3$

Solución:

$x^3 + y^3$ {tiene la forma $a^3 + b^3$}

x: raíz cúbica del primer término

y raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - x\times y + y^2);$

$\therefore \quad x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2).$

4. $m^3 - n^3$

<u>Solución</u>:

$m^3 - n^3$ {tiene la forma $a^3 - b^3$}

m: raíz cúbica del primer término

n: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$m^3 - n^3 = (m-n)(m^2 + m \times n + n^2);$

$\therefore \quad m^3 - n^3 = (m-n)(m^2 + mn + n^2).$

5. $a^3 - 1$

<u>Solución</u>:

$a^3 - 1 = a^3 - 1^3$ {tiene la forma $a^3 - b^3$}

a: raíz cúbica del primer término

1: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a \times 1 + 1^2);$

$\therefore \quad a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1).$

21. $64a^3 - 729$

<u>Solución</u>:

$64a^3 - 729 = (4a)^3 - 9^3$ {tiene la forma $a^3 - b^3$}

$4a$: raíz cúbica del primer término

9: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$64a^3 - 729 = (4a-9)\left[(4a)^2 + 4a \times 9 + 9^2\right];$

$\therefore \quad 64a^3 - 729 = (4a-9)\left[16a^2 + 36a + 81\right].$

22. $a^3b^3 - x^6$

<u>Solución</u>:

$a^3b^3 - x^6 = (ab)^3 - (x^2)^3$ {tiene la forma $a^3 - b^3$}

ab: raíz cúbica del primer término

x^2: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$a^3b^3 - x^6 = (ab - x^2)\left[(ab)^2 + ab \times x^2 + (x^2)^2\right];$

$\therefore \quad a^3b^3 - x^6 = (ab - x^2)\left[a^2b^2 + abx^2 + x^4\right].$

38. $27m^6 + 343n^9$

Solución:

$27m^6 + 343n^9 = (3m^2)^3 + (7n^3)^3$ {tiene la forma $a^3 + b^3$}

$3m^2$: raíz cúbica del primer término

$7n^3$: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$27m^6 + 343n^9 = (3m^2 + 7n^3)\left[(3m^2)^2 + 3m^2 \times 7n^3 + (7n^3)^2\right];$

$\therefore$ $27m^6 + 343n^9 = (3m^2 + 7n^3)\left[9m^4 - 21m^2n^3 + 49n^6\right].$

39. $216 - x^{12}$

Solución:

$216 - x^{12} = 6^3 - (x^4)^3$ {tiene la forma $a^3 - b^3$}

6: raíz cúbica del primer término

x^4: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$216 - x^{12} = (6 - x^4)\left[6^2 + 6 \times x^4 + (x^4)^2\right];$

$\therefore$ $216 - x^{12} = (6 - x^4)\left[36 + 6x^4 + x^8\right].$

Descomposición factorial

Suma o diferencia de cubos perfectos

Casos especiales

Procedimiento

1. Se abren dos paréntesis
2. En el primer paréntesis se escribe la suma o la diferencia, según el caso, de las raíces cúbicas de los dos términos
3. En el segundo paréntesis se escribe el cuadrado de la primera raíz, menos (si es una suma de cubos) o más (si es una diferencia de cubos) el producto de la primera raíz por la segunda, mas el cuadrado de la segunda raíz

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Descomponer en dos factores:

1. $1+(x+y)^3$

Solución:

$1+(x+y)^3$ {tiene la forma a^3+b^3}

1: raíz cúbica del primer término

$x+y$: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$$1+(x+y)^3=\left[1+(x+y)\right]\left[1^2-1\times(x+y)+(x+y)^2\right];$$

$$\therefore \quad 1+(x+y)^3=(1+x+y)(1-x-y+x^2+2xy+y^2).$$

2. $1-(a+b)^3$

Solución:

$1-(a+b)^3$ {tiene la forma a^3-b^3}

1: raíz cúbica del primer término

$a+b$: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$$1-(a+b)^3=\left[1-(a+b)\right]\left[1^2+1\times(a+b)+(a+b)^2\right];$$

$$\therefore \quad 1-(a+b)^3=(1-a-b)(1+a+b+a^2+2ab+b^2).$$

3. $27+(m-n)^3$

Solución:

$27+(m-n)^3=3^3+(m-n)^3$ {tiene la forma a^3+b^3}

3: raíz cúbica del primer término

$m-n$: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$$27+(m-n)^3=\left[3+(m-n)\right]\left[3^2-3\times(m-n)+(m-n)^2\right];$$

$$\therefore \quad 27+(m-n)^3=(3+m-n)(9-3m+3n+m^2-2mn+n^2).$$

4. $(x-y)^3-8$

Solución:

$(x-y)^3-8=(x-y)^3-2^3$ {tiene la forma a^3-b^3}

$x-y$: raíz cúbica del primer término

2: raíz cúbica del segundo término

De tal manera que:

$$(x-y)^3-8=\left[(x-y)-2\right]\left[(x-y)^2+(x-y)\times 2+2^2\right];$$

$$\therefore \quad (x-y)^3-8=(x-y-2)(x^2-2xy+y^2+2x-2y+4).$$

105

Descomposición factorial

Suma o diferencia de dos potencias iguales

Procedimiento

Se aplican los siguientes criterios:

Criterios de divisibilidad de expresiones de la forma $a^n \pm b^n$

Criterio 1: $a^n - b^n$ es divisible por $a - b$ siendo n par o impar

Criterio 2: $a^n + b^n$ es divisible por $a + b$ siendo n impar

Criterio 3: $a^n - b^n$ es divisible por $a + b$ cuando n es par

Criterio 4: $a^n + b^n$ nunca es divisible por $a - b$.

Factorar:

1. $a^5 + 1$

Solución:

$a^5 + 1$ es divisible por $(a + 1)$ {Criterio2}

$(a^5 + 1) \div (a + 1) = a^4 - a^3 + a^2 - a + 1;$

$\therefore \quad (a^5 + 1) = (a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1).$

2. $a^5 - 1$

Solución:

$a^5 - 1$ es divisible por $(a - 1)$ {Criterio 1}

$(a^5 - 1) \div (a - 1) = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1;$

$\therefore \quad (a^5 - 1) = (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1).$

106

Miscelánea sobre los diez casos de descomposición en factores

Descomponer en factores:

1. $5a^2 + a$

<u>Solución</u>:

$$5a^2 + a$$

El factor común es a. Así:

$$5a^2 + a = a(5a + 1).$$

2. $m^2 + 2mx + x^2$

<u>Solución</u>:

$$m^2 + 2mx + x^2$$

La raíz cuadrada del primer término es m; la raíz cuadrada del tercer término es x. Y el doble producto de estas raíces es $2mx$, el segundo término. Además, el primero y tercer términos tienen el mismo signo. Por lo tanto el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal:

$$m^2 + 2mx + x^2 = (m + x)^2.$$

3. $a^2 + a - ab - b$

<u>Solución</u>:

$$a^2 + a - ab - b$$

$\Rightarrow \quad a^2 + a - ab - b = (a^2 - ab) + (a - b) \qquad$ {asociando convenientemente},

$\Rightarrow \quad a^2 + a - ab - b = a(a - b) + (a - b) \qquad$ {factorizando el primer paréntesis por a},

$\therefore \quad a^2 + a - ab - b = (a - b)(a + 1) \qquad$ {factorizando por $(a - b)$};

4. $x^2 - 36$

Solución:

$x^2 - 36 = x^2 - 6^2$;

$\therefore \quad x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

5. $9x^2 - 6xy + y^2$

Solución:

$9x^2 - 6xy + y^2$

La raíz cuadrada del primer término es $3x$; la raíz cuadrada del tercer término es y. Y el doble producto de estas raíces es $6xy$, el segundo término. Además, el primero y tercer términos tienen el mismo signo. Por lo tanto el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal:

$9x^2 - 6xy + y^2 = (3x - y)^2$.

6. $x^2 - 3x - 4$

Solución:

$x^2 - 3x - 4$

El trinomio es de la forma $x^2 + bx + c$

La raíz cuadrada del primer término es x

El signo del segundo término es $-$

El producto de los signos del segundo y tercer términos del trinomio es $+$

Como los signos son diferentes, se buscan dos números cuya diferencia sea 3 y cuyo producto sea 4.

De tal manera que:

$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$.

7. $6x^2 - x - 2$

<u>Solución</u>:

$$6x^2 - x - 2$$

Multiplicamos el trinomio por 6 y lo escribimos de una forma adecuada

$$6(6x^2 - x - 2) = (6x)^2 - (6x) - 12$$

Factorizamos la expresión resultante

$(6x)^2 - (6x) - 12$

$6x$: raíz cuadrada del primer término del trinomio

$-$: signo del segundo término del trinomio

$-$ por $-$ da $+$: aplicamos la "ley de los signos" al producto de los signos del segundo y tercer términos

$4 - 3 = 1$: coeficiente del segundo término del trinomio (valor absoluto)

$4 \times 3 = 12$: coeficiente del tercer término del trinomio (valor absoluto)

De tal manera que:

$$(6x)^2 - (6x) - 12 = (6x - 4)(6x + 3) = 2(3x - 2)3(2x + 1) = 6(3x - 2)(2x + 1)$$

Dividimos la factorización obtenida en el paso anterior por 6 y, simplificamos:

$$\frac{(6x)^2 - (6x) - 12}{6} = \frac{6(3x - 2)(2x + 1)}{6} = (3x - 2)(2x + 1);$$

$\therefore \quad 6x^2 - x - 2 = (3x - 2)(2x + 1).$

8. $1 + x^3$

<u>Solución</u>:

$1 + x^3 = 1^3 + x^3$: suma de cubos perfectos,

$\Rightarrow \quad 1 + x^3 = (1 + x)(1^2 - 1 \times x + x^2);$

$\therefore \quad 1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2).$

9. $27a^3 - 1$

<u>Solución</u>:

$27a^3 - 1 = (3a)^3 - 1^3$: diferencia de cubos perfectos,

$\Rightarrow \quad 27a^3 - 1 = (3a - 1)[(3a)^2 + 3a \times 1 + 1^2];$

$\therefore \quad 27a^3 - 1 = (3a - 1)[9a^2 + 3a + 1].$

10. $x^5 + m^5$

<u>Solución</u>:

$x^5 + m^5$ es divisible por $(x + m)$ {Criterio de divisibilidad: "$a^n + b^n$ es divisible por $a + b$ siendo n impar")

$(x^5 + m^5) \div (x + m) = x^4 - mx^3 + m^2x^2 - m^3x + m^4$;

$\therefore \quad (x^5 + m^5) = (x + m)(x^4 - mx^3 + m^2x^2 - m^3x + m^4)$.

11. $a^3 - 3a^2b + 5ab^2$

<u>Solución</u>:

$a^3 - 3a^2b + 5ab^2 = a(a^2 - 3ab + 5b^2)$ {sacando factor común a}.

12. $2xy - 6y + xz - 3z$

<u>Solución</u>:

$2xy - 6y + xz - 3z = (2xy - 6y) + (xz - 3z)$ {asociando convenientemente},

$\Rightarrow \quad 2xy - 6y + xz - 3z = 2y(x - 3) + z(x - 3)$ {extrayendo factor común},

$\Rightarrow \quad 2xy - 6y + xz - 3z = (x - 3)(2y + z)$ {extrayendo factor común}.

13. $1 - 4b + 4b^2$

<u>Solución</u>:

$1 - 4b + 4b^2$

La raíz cuadrada del primer término es 1; la raíz cuadrada del tercer término es $2b$. Y el doble producto de estas raíces es $4b$, el segundo término. Además, el primero y tercer términos tienen el mismo signo. Por lo tanto el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal:

$1 - 4b + 4b^2 = (1 - 2b)^2$.

14. $4x^4+3x^2y^2+y^4$

Solución:

$$4x^4+3x^2y^2+y^4=4x^4+4x^2y^2+y^4-x^2y^2=(4x^4+4x^2y^2+y^4)-x^2y^2 \quad \{\text{sumando y restando } x^2y^2\},$$

$$\Rightarrow \quad 4x^4+3x^2y^2+y^4=(2x^2+y^2)^2-(xy)^2 \quad \{\text{factorizando el trinomio cuadrado perfecto}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4x^4+3x^2y^2+y^4=(2x^2+y^2+xy)(2x^2+y^2-xy) \quad \{\text{factorizando la diferencia de cuadrados}\};$$

$$\therefore \quad 4x^4+3x^2y^2+y^4=(2x^2+xy+y^2)(2x^2-xy+y^2) \quad \{\text{ordenando}\}.$$

15. $x^8-6x^4y^4+y^8$

Solución:

$$x^8-6x^4y^4+y^8=(x^8-2x^4y^4+y^8)-4x^4y^4 \quad \{6x^4y^4+y^8=2x^4y^4+4x^4y^4\},$$

$$\Rightarrow \quad x^8-6x^4y^4+y^8=(x^4-y^4)^2-(2x^2y^2)^2 \quad \{\text{factorizando el trinomio cuadrado perfecto}\},$$

$$\Rightarrow \quad x^8-6x^4y^4+y^8=(x^4-y^4+2x^2y^2)(x^4-y^4-2x^2y^2) \quad \{\text{factorizando la diferencia de cuadrados}\};$$

$$\Rightarrow \quad x^8-6x^4y^4+y^8=(x^4+2x^2y^2-y^4)(x^4-2x^2y^2-y^4) \quad \{\text{ordenando}\}.$$

16. a^2-a-30

Solución:

a^2-a-30

a: raíz cuadrada del primer término del trinomio

$-$: signo del segundo término del trinomio

$-$ por $-$ da $+$: aplicamos la "ley de los signos" al producto de los signos del segundo y tercer términos

$6-5=1$: coeficiente del segundo término del trinomio (valor absoluto)

$6\times 5=30$: coeficiente del tercer término del trinomio (valor absoluto)

De tal manera que:

$$a^2-a-30=(a-6)(a+5).$$

17. $15m^2 + 11m - 14$

Solución:

$$15m^2 + 11m - 14$$

Multiplicamos el trinomio por 15 y lo escribimos de una forma adecuada

$$15(15m^2 + 11m - 14) = (15m)^2 + 11(15m) - 210$$

Factorizamos la expresión resultante

$$(15m)^2 + 11(15m) - 210$$

$15m$: raíz cuadrada del primer término del trinomio

$+$: signo del segundo término del trinomio

$+$ por $-$ da $-$: aplicamos la "ley de los signos" al producto de los signos del segundo y tercer términos

$21 - 10 = 11$: coeficiente del segundo término del trinomio (valor absoluto)

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$21 \times 10 = 210$: coeficiente del tercer término del trinomio (valor absoluto)

De tal manera que:

$$(15m)^2 + 11(15m) - 210 = (15m + 21)(15m - 10) = 3(5m + 7)5(3m - 2) = 15(5m + 7)(3m - 2)$$

Dividimos la factorización obtenida en el paso anterior por 15 y, simplificamos:

$$\frac{(15m)^2 + 11(15m) - 210}{15} = \frac{15(5m + 7)(3m - 2)}{15} = (5m + 7)(3m - 2);$$

$\therefore \quad (15m)^2 + 11(15m) - 210 = (5m + 7)(3m - 2).$

18. $a^6 + 1$

Solución:

$a^6 + 1 = (a^2)^3 + 1^3 \qquad$ {suma de cubos perfectos},

$\Rightarrow \quad a^6 + 1 = (a^2 + 1)[(a^2)^2 - a^2(1) + 1^2];$

$\therefore \quad a^6 + 1 = (a^2 + 1)[a^4 - a^2 + 1].$

19. $8m^3 - 27y^6$

Solución:

$8m^3 - 27y^6 = (2m)^3 - (3y^2)^3 \qquad$ {diferencia de cubos perfectos},

$\Rightarrow \quad 8m^3 - 27y^6 = (2m - 3y^2)[(2m)^2 + (2m)(3y^2) + (3y^2)^2];$

$\therefore \quad 8m^3 - 27y^6 = (2m - 3y^2)[4m^2 + 6my^2 + 9y^4].$

20. $16a^2 - 24ab + 9b^2$

Solución:

$$16a^2 - 24ab + 9b^2$$

La raíz cuadrada del primer término es $4a$; la raíz cuadrada del tercer término es $3b$. Y el doble producto de estas raíces es $24ab$, el segundo término. Además, el primero y tercer términos tienen el mismo signo. Por lo tanto el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal:

$$16a^2 - 24ab + 9b^2 = (4a - 3b)^2.$$

21. $1+a^7$

Solución:

$1+a^7$ es divisible por $(1+a)$ {Criterio de divisibilidad: "a^n+b^n es divisible por $a+b$ siendo n impar"}

$(1+a^7)\div(1+a)=1^6-1^5a+1^4a^2-1^3a^3+1^2a^4-1(a^5)+a^6$;

$\therefore$ $(1+a^7)\div(1+a)=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6$.

22. $8a^3-12a^2+6a-1$

Solución:

$8a^3-12a^2+6a-1=(2a)^3-3(2a)^2+3(2a)-1^3$ {es el desarrollo del cubo de un binomio: $(a-b)^3$};

$\therefore$ $8a^3-12a^2+6a-1=(2a-1)^3$.

23. $1-m^2$

Solución:

$1-m^2=1^2-m^2$;

$\therefore$ $1-m^2=(1-m)(1+m)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

24. x^4+4x^2-21

Solución:

x^4+4x^2-21

x^2: raíz cuadrada del primer término del trinomio

$+$: signo del segundo término del trinomio

$+$ por $-$ da $-$: aplicamos la "ley de los signos" al producto de los signos del segundo y tercer términos

$7-3=4$: coeficiente del segundo término del trinomio (valor absoluto)

$7\times 3=21$: coeficiente del tercer término del trinomio (valor absoluto)

De tal manera que:

$x^4+4x^2-21=(x^2+7)(x^2-3)$.

25. $125a^6+1$

Solución:

$125a^6+1=(5a^2)^3+1^3$ {suma de cubos perfectos},

$\Rightarrow$ $125a^6+1=(5a^2+1)[(5a^2)^2-5a^2+1]$;

$\therefore$ $125a^6+1=(5a^2+1)[25a^4-5a^2+1]$.

26. $a^2+2ab+b^2-m^2$

Solución:

$a^2+2ab+b^2-m^2=(a^2+2ab+b^2)-m^2$ {asociando apropiadamente},

$\Rightarrow$ $a^2+2ab+b^2-m^2=(a+b)^2-m^2$ {factorizando el trinomio cuadrado perfecto};

$\therefore$ $a^2+2ab+b^2-m^2=(a+b+m)(a+b-m)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

27. $8a^2b + 16a^3b - 24a^2b^2$

<u>Solución</u>:

$$8a^2b + 16a^3b - 24a^2b^2 = 8a^2b(1 + 2a - 3b) \qquad \{\text{factor común } 8a^2b\}.$$

28. $x^5 - x^4 + x - 1$

<u>Solución</u>:

$$x^5 - x^4 + x - 1 = (x^5 - x^4) + (x - 1) \qquad \{\text{asociando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow \quad x^5 - x^4 + x - 1 = x^4(x - 1) + (x - 1) \qquad \{\text{factor común del primer paréntesis } x^4\};$$

$$\therefore \quad x^5 - x^4 + x - 1 = (x - 1)(x^4 + 1) \qquad \{\text{factor común } (x - 1)\}.$$

29. $6x^2 + 19x - 20$

<u>Solución</u>:

$$6x^2 + 19x - 20$$

Multiplicamos el trinomio por 6 y lo escribimos de una forma adecuada

$$6(6x^2 + 19x - 20) = (6x)^2 + 19(6x) - 120$$

Factorizamos la expresión resultante

$$(6x)^2 + 19(6x) - 120$$

$6x$: raíz cuadrada del primer término del trinomio

$+$: signo del segundo término del trinomio

$+$ por $-$ da $-$: aplicamos la "ley de los signos" al producto de los signos del segundo y tercer términos

$24 - 5 = 19$: coeficiente del segundo término del trinomio (valor absoluto)

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$24 \times 5 = 120$: coeficiente del tercer término del trinomio (valor absoluto)

De tal manera que:

$$(6x)^2 + 19(6x) - 120 = (6x + 24)(6x - 5) = 6(x + 4)(6x - 5)$$

Dividimos la factorización obtenida en el paso anterior por 6 y, simplificamos:

$$\frac{(6x)^2 + 19(6x) - 120}{6} = \frac{6(x + 4)(6x - 5)}{6} = (x + 4)(6x - 5);$$

$$\therefore \quad (6x)^2 + 19(6x) - 120 = (x + 4)(6x - 5).$$

30. $25x^4 - 81y^2$

Solución:

$$25x^4 - 81y^2 = (5x^2)^2 - (9y)^2 = (5x^2 + 9y)(5x^2 - 9y) \qquad \{\text{factorizando la diferencia de cuadrados}\}.$$

31. $1 - m^3$

Solución:

$1 - m^3 = 1^3 - m^3$ {diferencia de cubos perfectos},

$\Rightarrow \quad 1 - m^3 = (1 - m)(1 + m + m^2)$ {factorizando la diferencia de cubos};

32. $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2$

Solución:

$x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + (-a^2 + 2ab - b^2)$ {asociando convenientemente},

$\Rightarrow \quad x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$ {factorizando por -1 el segundo()},

$\Rightarrow \quad x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2 = (x + y)^2 - (a - b)^2$ {factorizando los trinomios cuadrados perfectos},

$\Rightarrow \quad x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2 = [x + y + (a - b)](x + y - (a - b)]$ {factorizando la diferencia de cuadrados};

$x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2 = [x + y + a - b][x + y - a + b]$ {destruyendo paréntesis}.

33. $21m^5n - 7m^4n^2 + 7m^3n^3 - 7m^2n$

Solución:

$$21m^5n - 7m^4n^2 + 7m^3n^3 - 7m^2n = 7m^2n(3m^3 - m^2n + mn^2 - 1) \qquad \{\text{factor común } 7m^2n\}.$$

34. $a(x + 1) - b(x + 1) + c(x + 1)$

Solución:

$$a(x + 1) - b(x + 1) + c(x + 1) = (x + 1)(a - b + c) \qquad \{\text{factor común } (x + 1)\}.$$

35. $4 + 4(x - y) + (x - y)^2$

Solución:

$$4 + 4(x - y) + (x - y)^2$$

La raíz cuadrada del primer término es 2; la raíz cuadrada del tercer término es $(x - y)$. Y el doble producto de estas raíces es $4(x - y)$, el segundo término. Además, el primero y tercer términos tienen el mismo signo. Por lo tanto el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal:

$$4 + 4(x - y) + (x - y)^2 = (2 + x - y)^2.$$

36. $1-a^2b^4$

Solución:

$$1-a^2b^4=1-(ab^2)^2;$$

$\therefore\quad 1-a^2b^4=(1+ab^2)(1-ab^2)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

37. $b^2+12ab+36a^2$

Solución:

$$b^2+12ab+36a^2$$

La raíz cuadrada del primer término es b; la raíz cuadrada del tercer término es $6a$. Y el doble producto de estas raíces es $12ab$, el segundo término. Además, el primero y tercer términos tienen el mismo signo. Por lo tanto el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal:

$$b^2+12ab+36a^2=(b+6a)^2=(6a+b)^2.$$

38. x^6+4x^3-77

Solución:

x^6+4x^3-77

x^3: raíz cuadrada del primer término del trinomio

$+$: signo del segundo término del trinomio

$+$ por $-$ da $-$: aplicamos la "ley de los signos" al producto de los signos del segundo y tercer términos

$11-7=4$: coeficiente del segundo término del trinomio (valor absoluto)

$11\times 7=77$: coeficiente del tercer término del trinomio (valor absoluto)

De tal manera que:

$$x^6+4x^3-77=(x^3+11)(x^3-7).$$

39. $15x^4-17x^2-4$

Solución:

$15x^4-17x^2-4=\dfrac{15(15x^4-17x^2-4)}{15}$ {multiplicando y dividiendo por el coeficiente de x^4},

$\Rightarrow\quad 15x^4-17x^2-4=\dfrac{(15x^2)^2-17(15x^2)-60}{15}$

{escribiendo los productos en el numerador en una forma adecuada},

$\Rightarrow\quad 15x^4-17x^2-4=\dfrac{(15x^2-20)(15x^2+3)}{15}$ {factorizando el numerador},

$\Rightarrow\quad 15x^4-17x^2-4=\dfrac{5(3x^2-4)3(5x^2+1)}{15}$ {sacando factor común de los paréntesis en el numerador};

$\therefore\quad 15x^4-17x^2-4=(3x^2-4)(5x^2+1)$ {simplificando}.

40. $1+(a-3b)^3$

Solución:

$1+(a-3b)^3=[1+(a-3b)][1-(a-3b)+(a-3b)^2]$ {factorizando la diferencia de cubos};

$\therefore\quad 1+(a-3b)^3=[1+a-3b][1-a+3b+a^2-6ab+9b^2]$ {suprimiendo paréntesis}.

41. x^4+x^2+25

Solución:

$$x^4+x^2+25=x^4+x^2+25+\left(9x^2-9x^2\right)=\left(x^4+10x^2+25\right)-9x^2,$$

$\Rightarrow \quad x^4+x^2+25=\left(x^2+5\right)^2-9x^2 \qquad$ {facorizando el trinomio cuadrado perfecto},

$\Rightarrow \quad x^4+x^2+25=\left(x^2+5-3x\right)\left(x^2+5+3x\right) \qquad$ {factorizando la diferencia de cuadrados};

$\therefore \quad x^4+x^2+25=\left(x^2-3x+5\right)\left(x^2+3x+5\right) \qquad$ {ordenando}.

42. a^8-28a^4+36

Solución:

$$a^8-28a^4+36=a^8-12a^4-16a^4+36=\left(a^8-12a^4+36\right)-16a^4,$$

$\Rightarrow \quad a^8-28a^4+36=\left(a^4-6\right)^2-16a^4 \qquad$ {facorizando el trinomio cuadrado perfecto},

$\Rightarrow \quad a^8-28a^4+36=\left(a^4-6-4a^2\right)\left(a^4-6+4a^2\right) \qquad$ {factorizando la diferencia de cuadrados};

$\therefore \quad a^8-28a^4+36=\left(a^4-4a^2-6\right)\left(a^4+4a^2-6\right) \qquad$ {ordenando}.

43. $343+8a^3$

Solución:

$$343+8a^3=7^3+(2a)^3,$$

$\Rightarrow \quad 343+8a^3=(7+2a)(7^2-7(2a)+(2a)^2) \qquad$ {facorizando la suma de cuadrados};

$\therefore \quad 343+8a^3=(7+2a)(49-14a+4a^2) \qquad$ {efectuando las operaciones indicadas}.

56. $49a^2b^2-14ab+1$

Solución:

$49a^2b^2-14ab+1$

$7ab$: raíz cuadrada del primer término del trinomio

1: raíz cuadrada del tercer término del trinomio

$2(7ab)(1)=14ab$: segundo término del trinomio

Por lo tanto, se trata de un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal (se escriben las raíces cuadradas del primero y tercer términos dentro de un paréntesis, y separados por el signo del segundo término):

$$149a^2b^2-14ab+1=(7ab-1)^2.$$

67. $15x^4-15x^3+20x^2$

Solución:

El factor común es $5x^2$; de tal manera que:

$$15x^4-15x^3+20x^2=5x^2(3x^2-3x+4)$$

{se escribe el factor común y a continuación, entre paréntesis, los resultados de dividir cada término entre el factor común}.

80. $x^6 - 4x^3 - 480$

Solución:

$$x^6 - 4x^3 - 480 = (x^3)^2 - 4(x^3) - 480$$

Nos queda como un trinomio especial de la forma $x^2 + bx + c$; lo factorizamos como tal:

$$x^6 - 4x^3 - 480 = (x^3 - 24)(x^3 + 20)$$

$$\begin{array}{r|l} 480 & 2 \\ 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

81. $ax - bx + b - a - by + ay$

Solución:

$$ax - bx + b - a - by + ay = (ax - bx) + (-a + b) + (ay - by) \qquad \{\text{asociando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow \quad ax - bx + b - a - by + ay = x(a - b) - (a - b) + y(a - b) \qquad \{\text{sacando factor común}\};$$

$$\therefore \quad ax - bx + b - a - by + ay = (a - b)(x - 1 + y) = (a - b)(x + y - 1) \qquad \{\text{factorizando por } (a - b)\}.$$

82. $6am - 3m - 2a + 1$

Solución:

$$6am - 3m - 2a + 1 = (6am - 3m) + (-2a + 1) \qquad \{\text{asociando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow \quad 6am - 3m - 2a + 1 = 3m(2a - 1) - (2a - 1) \qquad \{\text{sacando factor común}\};$$

$$\therefore \quad 6am - 3m - 2a + 1 = (2a - 1)(3m - 1) \qquad \{\text{factorizando por } (2a - 1)\}.$$

83. $15+14x-8x^2$

Solución:

$$15+14x-8x^2 = -(8x^2-14x-15) \qquad \{\text{factorizando por } -1\}$$

Nos queda como un trinomio de la forma ax^2+bx+c; lo factorizamos como tal:

$$8x^2-14x-15 = \frac{(8x)^2-14(8x)-120}{8},$$

$$\Rightarrow \quad 8x^2-14x-15 = \frac{(8x-20)(8x+6)}{8},$$

$$\Rightarrow \quad 8x^2-14x-15 = \frac{4(2x-5)\times 2(4x+3)}{8};$$

$$\therefore \quad 8x^2-14x-15 = (2x-5)(4x+3);$$

$$\therefore \quad 15+14x-8x^2 = -(2x-5)(4x+3) = (5-2x)(4x+3).$$

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

84. $a^{10}-a^8+a^6+a^4$

Solución:

$$a^{10}-a^8+a^6+a^4 = a^4(a^6-a^4+a^2+1) \qquad \{\text{sacando factor común } a^4\},$$

85. $2x(a-1)-a+1$

Solución:

$$2x(a-1)-a+1 = 2x(a-1)-(a-1) \qquad \{\text{factorizando por } -1 \text{ los dos últimos términos}\};$$

$$\therefore \quad 2x(a-1)-a+1 = (a-1)(2x-1) \qquad \{\text{sacando factor común}\}.$$

86. $(m+n)(m-n)+3n(m-n)$

Solución:

$$(m+n)(m-n)+3n(m-n) = (m-n)(m+n+3n) \qquad \{\text{sacando factor común}\};$$

$$\therefore \quad (m+n)(m-n)+3n(m-n) = (m-n)(m+4n) \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

89. $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

Solución:

$$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$$

x: raíz cuadrada del primer término del trinomio

$\frac{1}{3}$: raíz cuadrada del tercer término del trinomio

$2(x)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}x$: segundo término del trinomio

Por lo tanto se trata de un trinomio cuadrado perfecto, y se factoriza como tal (se escriben las raíces cuadradas del primero y tercer términos dentro de un paréntesis, y separados por el signo del segundo término):

$$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9} = \left(x-\frac{1}{3}\right)^2.$$

112. $8(a+1)^3-1$

Solución:

$$8(a+1)^3-1=\left(2(a+1)\right)^3-1^3,$$

$\Rightarrow \quad 8(a+1)^3-1=\left(2(a+1)-1\right)\left((2(a+1))^2+2(a+1)+1\right)$ {factorizando la diferencia de cubos},

$\Rightarrow \quad 8(a+1)^3-1=(2a+2-1)(4(a+1)^2+2a+2+1)$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 8(a+1)^3-1=(2a+1)(4(a^2+2a+1)+2a+3)$ {reduciendo y elevando al cuadrado},

$\Rightarrow \quad 8(a+1)^3-1=(2a+1)(4a^2+8a+4+2a+3)$ {suprimiendo paréntesis};

$\therefore \quad 8(a+1)^3-1=(2a+1)(4a^2+10a+7)$ {reduciendo}.

107

Descomposición factorial

Combinación de casos de factores

Descomposición de una expresión algebraica en tres factores

Procedimiento
1. Se saca el factor común **2.** Se factoriza la expresión resultante, aplicando el método de factorización requerido por la forma del polinomio (estudiados en los diez casos de factorización: Ejercicios 89 a 110)

Descomponer en tres factores:

1. $3ax^2 - 3a$

Solución:

$3ax^2 - 3a = 3a(x^2 - 1)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $3ax^2 - 3a = 3a(x+1)(x-1)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

2. $3x^2 - 3x - 6$

Solución:

$3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $3x^2 - 3x - 6 = 3(x-2)(x+1)$ {factorizando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$}.

3. $2a^2x - 4abx + 2b^2x$

Solución:

$2a^2x - 4abx + 2b^2x = 2x(a^2 - 2ab + b^2)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $2a^2x - 4abx + 2b^2x = 2x(a-b)^2$ {factorizando el trinomio cuadrado perfecto}.

4. $2a^3 - 2$

Solución:

$2a^3 - 2 = 2(a^3 - 1)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $2a^3 - 2 = 2(a-1)(a^2 + a + 1)$ {factorizando la diferencia de cubos}.

5. $a^3 - 3a^2 - 28a$

Solución:

$a^3 - 3a^2 - 28a = a(a^2 - 3a - 28)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $a^3 - 3a^2 - 28a = a(a-7)(x+4)$ {factorizando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$}.

6. $x^3 - 4x + x^2 - 4$

Solución:

$x^3 - 4x + x^2 - 4 = x(x^2 - 4) + (x^2 - 4)$ {sacando factor común en los dos primeros términos}.

$\Rightarrow$ $x^3 - 4x + x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x+1)$ {sacando factor común $(x^2 - 4)$};

$\therefore$ $x^3 - 4x + x^2 - 4 = (x+2)(x-2)(x+1)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

7. $3ax^3 + 3ay^3$

Solución:

$3ax^3 + 3ay^3 = 3a(x^3 + y^3)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $x^3 + 3ay^3 = 3a(x+y)(x^2 - xy + y^2)$ {factorizando la suma de cubos}.

8. $4ab^2 - 4abn + an^2$

Solución:

$4ab^2 - 4abn + an^2 = a(4b^2 - 4bn + n^2)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $4ab^2 - 4abn + an^2 = a(2b-n)^2$ {factorizando el trinomio cuadrado perfecto}.

9. $x^4 - 3x^2 - 4$

Solución:

$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1)$ {factorizando el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ };

$\therefore$ $x^4 - 3x^2 - 4 = (x+2)(x-2)(x^2+1)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

10. $a^3 - a^2 - a + 1$

Solución:

$a^3 - a^2 - a + 1 = a^2(a-1) - (a-1)$

{sacando el factor común a^2 en los dos primeros términos, y -1 en los dos últimos}

$\Rightarrow$ $a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)(a^2-1)$ {sacando factor común $(a-1)$};

$\therefore$ $a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)(a+1)(a-1) = (a-1)^2(a+1)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

11. $2ax^2 - 4ax + 2a$

Solución:

$2ax^2 - 4ax + 2a = 2a(x^2 - 2x + 1)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $2ax^2 - 4ax + 2a = 2a(x-1)^2$ {factorizando la el trinomio cuadrado perfecto}.

12. $x^3 - x + x^2y - y$

Solución:

$x^3 - x + x^2y - y = x(x^2-1) + y(x^2-1)$ {sacando factor común ...},

$\Rightarrow$ $x^3 - x + x^2y - y = (x^2-1)(x+y)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $x^3 - x + x^2y - y = (x+1)(x-1)(x+y)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

56. $16a^5b - 56a^3b^3 + 49ab^5$

Solución:

$16a^5b - 56a^3b^3 + 49ab^5 = ab(16a^4 - 56a^2b^2 + 49b^4)$ {sacando factor común}

Ahora, vamos a factorizar el paréntesis:

$16a^4 - 56a^2b^2 + 49b^4$

$4a^2$: raíz cuadrada del primer término del trinomio

$7b^2$: raíz cuadrada del tercer término del trinomio

$2(4a^2)(7b^2) = 56a^2b^2$: segundo término del trinomio

Por lo tanto, se trata de un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza como tal:

$16a^4 - 56a^2b^2 + 49b^4 = (4a^2 - 7b^2)^2$

De tal a manera que:

$16a^5b - 56a^3b^3 + 49ab^5 = ab(4a^2 - 7b^2)^2$.

Descomposición factorial

Combinación de casos de factores

Descomposición de una expresión algebraica en cuatro factores

1. $1-a^8$

Solución:

$1-a^8=(1+a^4)(1-a^4)$ {factorizando la diferencia de cuadrados},

$\Rightarrow$ $1-a^8=(1+a^4)(1-a^2)(1+a^2)$ {factorizando la diferencia de cuadrados};

$\therefore$ $(1+a^4)(1-a^4)=(1+a^4)(1-a)(1+a)(1+a^2)=(1+a^4)(1+a^2)(1+a)(1-a)$

{factorizando la diferencia de cuadrados}.

2. a^6-1

Solución:

$a^6-1=(a^3+1)(a^3-1)$

{factorizando la diferencia de cuadrados};

$\therefore$ $a^6-1=(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$ {factorizando la suma y la diferencia de cubos}.

3. x^4-41x^2+400

Solución:

$x^4-41x^2+400=(x^2-25)(x^2-16)$ {factorizando el trinomio de la forma x^2+bx+c};

$\therefore$ $x^4-41x^2+400=(x+5)(x-5)(x+4)(x-4)$ {factorizando las diferencias de cuadrados}.

4. $a^4-2a^2b^2+b^4$

Solución:

$a^4-2a^2b^2+b^4=(a^2-b^2)^2$ {factorizando el trinomio cuadrado perfecto},

$\therefore$ $a^4-2a^2b^2+b^4=\left[(a+b)(a-b)\right]^2=(a+b)^2(a-b)^2$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

5. $x^5 + x^3 - 2x$

<u>Solución</u>:

$x^5 + x^3 - 2x = x(x^4 + x^2 - 2)$ {sacando factor común},

$\Rightarrow$ $x^5 + x^3 - 2x = x(x^2 + 2)(x^2 - 1)$ {factorizando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$};

$\therefore$ $x^5 + x^3 - 2x = x(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

6. $2x^4 + 6x^3 - 2x - 6$

<u>Solución</u>:

$2x^4 + 6x^3 - 2x - 6 = 2x^3(x + 3) - 2(x + 3)$ {sacando factor común ...},

$\Rightarrow$ $2x^4 + 6x^3 - 2x - 6 = (x + 3)(2x^3 - 2)$ {sacando factor común},

$\Rightarrow$ $2x^4 + 6x^3 - 2x - 6 = 2(x + 3)(x3 - 1)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $2x^4 + 6x^3 - 2x - 6 = 2(x + 3)(x - 1)(x^2 + x + 1)$ {factorizando la diferencia de cubos}.

7. $3x^4 - 243$

<u>Solución</u>:

$3x^4 - 243 = 3(x^4 - 81)$ {sacando factor común},

$\Rightarrow$ $3x^4 - 243 = 3(x^2 - 9)(x^2 + 9)$ {factorizando la diferencia de cuadrados};

$\therefore$ $3x^4 - 243 = 3(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

Descomposición factorial

Combinación de casos de factores

Descomposición de una expresión algebraica en cinco y seis factores

Descomponer en cinco factores:

1. $x^9 - xy^8$

Solución:

$x^9 - xy^8 = x(x^8 - y^8)$ {sacando factor común},

$\Rightarrow$ $x^9 - xy^8 = x(x^4 + y^4)(x^4 - y^4)$ {factorizando la diferencia de cuadrados},

$\Rightarrow$ $x^9 - xy^8 = x(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ {factorizando la diferencia de cuadrados};

$\therefore$ $x^9 - xy^8 = x(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

2. $x^5 - 40x^3 + 144x$

Solución:

$x^5 - 40x^3 + 144x = x(x^4 - 40x^2 + 144)$ {sacando factor común},

$\Rightarrow$ $x^5 - 40x^3 + 144x = x(x^2 - 36)(x^2 - 4)$ {factorizando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$};

$\therefore$ $x^5 - 40x^3 + 144x = x(x + 6)(x - 6)(x + 2)(x - 2)$ {factorizando las diferencias de cuadrados}.

3. $a^6 + a^3b^3 - a^4 - ab^3$

Solución:

$a^6 + a^3b^3 - a^4 - ab^3 = a^3(a^3 + b^3) - a(a^3 + b^3)$ {sacando factor común ...},

$\Rightarrow$ $a^6 + a^3b^3 - a^4 - ab^3 = a^3(a^3 + b^3) - a(a^3 + b^3)$ {factorizando la diferencia de cuadrados},

$\Rightarrow$ $a^6 + a^3b^3 - a^4 - ab^3 = (a^3 + b^3)(a^3 - a) = a(a^3 + b^3)(a^2 - 1)$ {sacando factor común};

$\therefore$ $a^6 + a^3b^3 - a^4 - ab^3 = (a^3 + b^3)(a^3 - a) = a(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a + 1)(a - 1)$

{factorizando la diferencia de cubos y la diferencia de cuadrados}.

Descomponer en seis factores:

11. $x^{17} - x$

Solución:

$x^{17} - x = x(x^{16} - 1)$ {sacando factor común},

$\Rightarrow$ $x^{17} - x = x(x^8 + 1)(x^8 - 1)$ {factorizando la diferencia de cuadrados},

$\Rightarrow$ $x^{17} - x = x(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^4 - 1)$ {factorizando la diferencia de cuadrados},

$\Rightarrow$ $x^{17} - x = x(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ {factorizando la diferencia de cuadrados};

$\therefore$ $x^{17} - x = x(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

12. $3x^6 - 75x^4 - 48x^2 + 1200$

Solución:

$3x^6 - 75x^4 - 48x^2 + 1200 = 3x^4(x^2 - 25) - 48(x^2 - 25)$ {sacando factor común ...},

$\Rightarrow$ $3x^6 - 75x^4 - 48x^2 + 1200 = (x^2 - 25)(3x4 - 48) = 3(x^2 - 25)(x^4 - 16)$ {sacando factor común},

$\Rightarrow$ $3x^6 - 75x^4 - 48x^2 + 1200 = 3(x + 5)(x - 5)(x^2 + 4)(x^2 - 4)$ {factorizando las diferencias de cuadrados};

$\therefore$ $3x^6 - 75x^4 - 48x^2 + 1200 = 3(x + 5)(x - 5)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$ {factorizando la diferencia de cuadrados}.

Descomposición factorial

Descomposición de un polinomio en factores por el método de evaluación

P r o c e d i m i e n t o

Recordemos que "un polinomio entero y racional en x, que se anula para $x = a$, es divisible por $x - a$" (Corolario del Teorema del residuo)

1. Sacamos los divisores del término independiente
2. Hallamos el valor del polinomio, $P(x)$, para cada uno de los divisores hallados en el paso anterior
3. Tomamos como correcto el divisor, a, para el cual el poloinomio se anula (da cero): hemos hallado uno de los factores del polinomio; este factor es, $x - a$
4. Buscamos los coeficientes del otro factor por medio de la "División sintética"
Nota: *me parece que este procedimiento es menos laborioso que el que se presenta en el Álgebra de Baldor; pues, es más fácil calcular P(x) para varios valores de x que realizar otras tantas divisiones sintéticas.*

Descomponer por evaluación:

1. $x^3 + x^2 - x - 1$

Solución:

El término independiente es 1

Los divisores de 1 son 1 y -1

$P(x) = x^3 + x^2 - x - 1,$

$\Rightarrow \quad P(1) = 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$: se anula;

$\therefore \quad (x-1)$ divide a $P(x)$;

$\therefore \quad (x-1)$ es un factor de $P(x)$

Ahora, encontremos los coeficientes del otro factor por medio de la división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & -1 & \underline{1} \\ & 1 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$\therefore \quad x^2 + 2x + 1$: segundo factor del polinomio

y $\quad x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \qquad$ {factorizando el trinomio cuadrado perfecto}

De tal manera que:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2.$$

2. $x^3 - 4x^2 + x + 6$

Solución:

El término independiente es 6

Los divisores de 6 son $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$ y ± 6

$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,$

$\Rightarrow \quad P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$: se anula;

$\therefore \quad (x+1)$ divide a $P(x)$;

$\therefore \quad (x+1)$ es un factor de $P(x)$

Ahora, encontremos los coeficientes del otro factor por medio de la división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & 1 & 6 & \underline{-1} \\ & -1 & 5 & -6 & \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$\therefore \quad x^2 - 5x + 6$: segundo factor del polinomio

y $\quad x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \qquad$ {factorizando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$}

De tal manera que:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-3)(x-2).$$

111

Máximo común divisor

Máximo común divisor de monomios

P r o c e d i m i e n t o

1. Se halla el m.c.d. (mínimo común divisor) de los coeficientes:
a. Se descomponen los números en sus factores primos
b. Se multiplican los factores primos comunes y con el menor exponente
c. Para representar el m.c.d., *k*, de los números *a* y *b*, se utiliza la simbología $(a, b) = k$
2. A continuación del m.c.d. de los coeficientes se escriben las letras comunes y, con el menor exponente

Hallar el m.c.d. de:

1. $a^2x,\ ax^2$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 1 y 1, y $(1,\ 1) = 1$

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es ax

De tal manera que:

$$(a^2x,\ ax^2) = ax.$$

2. $ab^2c,\ a^2bc$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 1 y 1, y $(1,\ 1) = 1$

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es abc

De tal manera que:

$$(ab^2c,\ a^2bc) = abc.$$

3. $2x^2y,\ x^2y^3$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 2 y 1, y $(2,\ 1) = 1$

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es x^2y

De tal manera que:

$$(2x^2y,\ x^2y^3) = x^2y.$$

4. $6a^2b^3,\ 15a^3b^4$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 6 y 15, y $(6,\ 15) = 3$

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es a^2b^3

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

De tal manera que:

$$(6a^2b^3,\ 15a^3b^4) = 3a^2b^3.$$

5. $8am^3n,\ 20x^2m^2$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 8 y 20, y $(8,\ 20) = 4$

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es m^2

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

De tal manera que:

$$(8am^3n,\ 20x^2m^2) = 4m^2.$$

6. $18mn^2,\ 27a^2m^3n^4$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 18 y 27, y (18, 27) = 9

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es mn^2

De tal manera que:

$(18mn^2,\ 27a^2m^3n^4) = 9mn^2$.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

7. $15a^2b^3c,\ 24ab^2x,\ 36b^4x^2$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 15, 24 y 36, y (15, 24, 36) = 3

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es b^2

De tal manera que:

$(15a^2b^3c,\ 24ab^2x,\ 36b^4x^2) = 3b^2$.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

8. $12x^2yz^3,\ 18xy^2z,\ 24x^3yz^2$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 12, 18 y 24, y (12, 18, 24) = 6

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es xyz

De tal manera que:

$(12x^2yz^3,\ 18xy^2z,\ 24x^3yz^2) = 6xyz$.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

9. $28a^2b^3c^4,\ 35a^3b^4c^5,\ 42a^4b^5c^6$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 28, 35 y 42, y (28, 35, 42) = 7

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es $a^2b^3c^4$

De tal manera que:

$(28a^2b^3c^4,\ 35a^3b^4c^5,\ 42a^4b^5c^6) = 7a^2b^3c^4$.

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

10. $72x^3y^4z^4,\ 96x^2y^2z^3,\ 120x^4y^5z^7$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 72, 96 y 120, y (72, 96, 120) = 24

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es $x^2y^2z^3$

De tal manera que:

$(72x^3y^4z^4,\ 96x^2y^2z^3,\ 120x^4y^5z^7) = 24x^2y^2z^3$.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

11. $42am^2n,\ 56m^3n^2x,\ 70m^4n^2y$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 42, 56 y 70, y (42, 56, 70) = 14

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es m^2n

De tal manera que:

$(42am^2n,\ 56m^3n^2x,\ 70m^4n^2y) = 14m^2n.$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

12. $75a^4b^3c^2,\ 150a^5b^7x^2,\ 225a^3b^6y^2$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 75, 150 y 225, y (75, 150, 225) = 75

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es a^3b^3

De tal manera que:

$(75a^4b^3c^2,\ 150a^5b^7x^2,\ 225a^3b^6y^2) = 75a^3b^3.$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

13. $4a^2b,\ 8a^3b^2,\ 2a^2bc,\ 1ab^3c^2$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 4, 8, 2 y 10, y (4, 8, 2,10) = 2

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es ab

De tal manera que:

$(4a^2b,\ 8a^3b^2,\ 2a^2bc,\ 1ab^3c^2) = 2ab.$

14. $38a^2x^6y^4,\ 76mx^4y^7,\ 95x^5y^6$

Solución:

Los coeficientes de los monomios son 38, 76 y 95, y (38, 76, 95) = 19

La parte literal común y, cada letra con su menor exponente, es x^4y^4

De tal manera que:

$(38a^2x^6y^4,\ 76mx^4y^7,\ 95x^5y^6) = 19x^4y^4.$

$$\begin{array}{r|l} 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

112

Máximo común divisor

Máximo común divisor de polinomios por descomposición en factores

Procedimiento

1. Se factoriza cada polinomio
2. Se identifican los factores comunes
3. El m.c.d. será el producto de los factores comunes

Hallar, por descomposición en factores, el m.c.d. de:

1. $2a^2+2ab,\ 4a^2-4ab$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$2a^2+2ab=2a(a+b) \qquad \text{y} \qquad 4a^2-4ab=4a(a-b)$$

El factor común es $2a$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(2a^2+2ab,\ 4a^2-4ab)=2a.$$

2. $6x^3y-6x^2y,\ 9x^3y^2+18x^2y^2$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$6x^3y-6x^2y=6x^2y(x-1) \qquad \text{y} \qquad 9x^3y^2+18x^2y^2=9x^2y^2(x+2)$$

El factor común es $3x^2y$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(6x^3y-6x^2y,\ 9x^3y^2+18x^2y^2)=3x^2y.$$

3. $12a^2b^3,\ 4a^3b^2-8a^2b^3$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$12a^2b^3 \qquad \text{y} \qquad 4a^3b^2-8a^2b^3=4a^2b^2(a-2b)$$

El factor común es $4a^2b^2$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(12a^2b^3,\ 4a^3b^2-8a^2b^3)=4a^2b^2.$$

4. $ab+b,\ a^2+a$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$ab+b=b(a+1) \qquad \text{y} \qquad a^2+a=a(a+1)$$

El factor común es $(a+1)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(ab+b,\ a^2+a)=a+1.$$

5. $x^2-x,\ x^3-x^2$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$x^2-x=x(x-1) \qquad \text{y} \qquad x^3-x^2=x^2(x-1)$$

Los factores comunes son x y $(x-1)$, y su producto es $x(x-1)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(x^2-x,\ x^3-x^2)=x(x-1).$$

6. $30ax^2 - 15x^3,\ 10axy^2 - 20x^2y^2$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$30ax^2 - 15x^3 = 15x^2(2a - x) \qquad \text{y} \qquad 10axy^2 - 20x^2y^2 = 10xy^2(a - 2x)$$

El factor común es $5x$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(30ax^2 - 15x^3,\ 10axy^2 - 20x^2y^2) = 5x.$$

7. $18a^2x^3y^4,\ 6a^2x^2y^4 - 18a^2xy^4$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$18a^2x^3y^4 \qquad \text{y} \qquad 6a^2x^2y^4 - 18a^2xy^4 = 6a^2xy^4(x - 3)$$

El factor común es $6a^2xy^4$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(18a^2x^3y^4,\ 6a^2x^2y^4 - 18a^2xy^4) = 6a^2xy^4.$$

8. $5a^2 - 15a,\ a^3 - 3a^2$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$5a^2 - 15a = 5a(a - 3) \qquad \text{y} \qquad a^3 - 3a^2 = a^2(a - 3)$$

Los factores comunes son a y $(a - 3)$, y su producto es $a(a - 3)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(5a^2 - 15a,\ a^3 - 3a^2) = a(a - 3).$$

9. $3x^3 + 15x^2,\ ax^2 + 5ax$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$3x^3 + 15x^2 = 3x^2(x + 5) \qquad \text{y} \qquad ax^2 + 5ax = ax(x + 5)$$

Los factores comunes son x y $(x + 5)$, y su producto es $x(x + 5)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(3x^3 + 15x^2,\ ax^2 + 5ax) = x(x + 5).$$

10. $a^2 - b^2,\ a^2 - 2ab + b^2$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \qquad \text{y} \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

El factor común es $(a - b)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(a^2 - b^2,\ a^2 - 2ab + b^2) = a - b.$$

11. $m^3+n^3,\ 3am+3an$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2) \quad \text{y} \quad 3am+3an=3a(m+n)$$

El factor común es $(m+n)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(m^3+n^3,\ 3am+3an)=m+n.$$

12. $x^2-4,\ x^3-8$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$x^2-4=(x+2)(x-2) \quad \text{y} \quad x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

El factor común es $(x-2)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(x^2-4,\ x^3-8)=x-2.$$

13. $2ax^2+4ax,\ x^3-x^2-6x$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$2ax^2+4ax=2ax(x+2) \quad \text{y} \quad x^3-x^2-6x=x(x-3)(x+2)$$

Los factores comunes son x y $(x+2)$, y su producto es $x(x+2)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(2ax^2+4ax,\ x^3-x^2-6x)=x(x+2).$$

14. $9x^2-1,\ 9x^2-6x+1$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$9x^2-1=(3x-1)(3x+1) \quad \text{y} \quad 9x^2-6x+1=(3x-1)^2$$

El factor común es $(3x-1)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(9x^2-1,\ 9x^2-6x+1)=3x-1.$$

15. $4a^2+4ab+b^2,\ 2a^2-2ab+ab-b^2$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$4a^2+4ab+b^2=(2a+b)^2 \quad \text{y} \quad 2a^2-2ab+ab-b^2=2a(a-b)+b(a-b)=(a-b)(2a+b)$$

El factor común es $(2a+b)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(4a^2+4ab+b^2,\ 2a^2-2ab+ab-b^2)=2a+b.$$

16. $3x^2+3x-60,\ 6x^2-18x-24$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$3x^2+3x-60=3(x+5)(x-4) \qquad y \qquad 6x^2-18x-24=6(x-4)(x+1)$$

Los factores comunes son 3 y $(x-4)$, y su producto es $3(x-4)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(3x^2+3x-60,\ 6x^2-18x-24)=3(x-4).$$

17. $8x^3+y^3,\ 4ax^2-ay^2$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$8x^3+y^3=(2x+y)(4x^2-2xy+y^2) \qquad y \qquad 4ax^2-ay^2=a(2x+y)(2x-y)$$

El factor común es $(2x+y)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(8x^3+y^3,\ 4ax^2-ay^2)=2x+y.$$

18. $2a^3-12a^2b+18ab^2,\ a^3x-9ab^2x$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$2a^3-12a^2b+18ab^2=2a(a-3b)^2 \qquad y \qquad a^3x-9ab^2x=ax(a-3b)(a+3b)$$

Los factores comunes son a y $(a-3b)$, y su producto es $a(a-3b)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(2a^3-12a^2b+18ab^2,\ a^3x-9ab^2x)=a(a-3b).$$

19. $ac+ad-2bc-2bd,\ 2c^2+4cd+2d^2$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$ac+ad-2bc-2bd=a(c+d)-2b(c+d)=(c+d)(a-2b) \qquad y \qquad 2c^2+4cd+2d^2=2(c+d)^2$$

El factor común es $(c+d)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(ac+ad-2bc-2bd,\ 2c^2+4cd+2d^2)=c+d.$$

20. $3a^2m^2+6a^2m-45a^2,\ 6am^2x+24amx-30ax$

<u>Solución</u>:

Factoricemos los polinomios

$$3a^2m^2+6a^2m-45a^2=3a^2(m^2+2m-15)=3a^2(m+5)(m-3)$$

y $\qquad 6am^2x+24amx-30ax=6ax(m^2+4m-5)=6ax(m+5)(m-1)$

Los factores comunes son 3, a y $(m+5)$, y su producto es $3a(m+5)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(3a^2m^2+6a^2m-45a^2,\ 6am^2x+24amx-30ax)=3a(m+5).$$

Máximo común divisor

Máximo común divisor de dos polinomios por divisiones sucesivas

Procedimiento

1. Se ordenan los polinomios con relación a una misma letra
2. Si es posible, se factorizan los polinomios; los factores comunes a ambos polinomios harán parte del m.c.d.
3. Se divide el polinomio de mayor grado entre el de menor grado
4. Si la división es exacta, el divisor es el m.c.d.
5. Si la división no es exacta, se divide el divisor por el primer residuo, éste por el segundo residuo y así sucesivamente hasta llegar a una división exacta
6. El último divisor es el m.c.d. buscado

Nota1: *todas las divisiones deben continuarse hasta que el primer término del residuo sea de grado inferior al primer término del divisor*

Nota2: *durante el proceso, se puede dividir o multiplicar el dividendo, o el divisor o el residuo por un factor cualquiera.*

Nota3: la simbología para denotar el m.c.d., *k*, de los números *a*, *b*, ... es la siguiente:

$(a, b, ...) = k$

Hallar, por divisiones sucesivas, el m.c.d. de:

21. $4x^4 - y^2,\ (2x^2 - y)^2$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$4x^4 - y^2 = (2x^2 + y)(2x^2 - y) \quad y \quad (2x^2 - y)^2$$

El factor común es $(2x^2 - y)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(4x^4 - y^2,\ (2x^2 - y)^2) = 2x^2 - y.$$

22. $3x^3 - 3x,\ 9x^3 - 9x$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$3x^3 - 3x = 3x(x^2 - 1) = 3x(x - 1)(x + 1) \quad y \quad 9x^3 - 9x = 9x(x^2 - 1)$$

Los factores comunes son $3x$ y $(x^2 - 1)$, y su producto es $3x(x^2 - 1)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(3x^3 - 3x,\ 9x^3 - 9x) = 3x(x^2 - 1).$$

23. $a^2 + ab,\ ab + b^2,\ a^3 + a^2b$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$a^2 + ab = a(a + b),\ ab + b^2 = b(a + b) \quad y \quad a^3 + a^2b = a^2(a + b)$$

El factor común es $(a + b)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(a^2 + ab,\ ab + b^2,\ a^3 + a^2b) = a + b.$$

24. $2x^3 - 2x^2,\ 3x^2 - 3x,\ 4x^3 - 4x^2$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$2x^3 - 2x^2 = 2x^2(x - 1),\ 3x^2 - 3x = 3x(x - 1) \quad y \quad 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x - 1)$$

Los factores comunes son x y $(x - 1)$, y su producto es $x(x - 1)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(2x^3 - 2x^2,\ 3x^2 - 3x,\ 4x^3 - 4x^2) = x(x - 1).$$

25. $x^4 - 9x^2,\ x^4 - 5x^3 + 6x^2,\ x^4 - 6x^3 + 9x^2$

Solución:

Factoricemos los polinomios

$$x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9) = x^2(x - 3)(x + 3),$$

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6) = x^2(x - 3)(x - 2)$$

y $$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2(x^2 - 6x + 9) = x^2(x - 3)^2$$

Los factores comunes son x^2 y $(x - 3)$, y su producto es $x^2(x - 3)$;

Por lo tanto, el m.c.d. de los polinomios será

$$(x^4 - 9x^2,\ x^4 - 5x^3 + 6x^2,\ x^4 - 6x^3 + 9x^2) = x^2(x - 3).$$

1. $12x^2+8x+1$ y $2x^2-5x-3$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 12x^2+8x+1 & 2x^2-5x-3 \\ \hline \underline{-12x^2+30x+18} & 6 \\ 38x+19 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el residuo por 19:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x-3 & 2x+1 \\ \hline \underline{-2x^2-x\quad} & x-3 \\ -6x-3 & \\ \underline{6x+3} & \\ 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es el último divisor, $2x+1$;

$\therefore\quad (12x^2+8x+1,\ 2x^2-5x-3)=2x+1.$

2. $6a^2-2a-20$ y $2a^3-a^2-6a$

Solución:

Sea

$2a^3-a^2-6a$: dividendo

$6a^2-2a-20$: divisor

Multiplicamos el dividendo por 3 y lo dividimos por a, y efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} 6a^2-3a-18 & 6a^2-2a-20 \\ \hline \underline{-6a^2+2a+20} & a \\ -a\ +2 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de multiplicar el residuo por -1:

$$\begin{array}{r|l} 6a^2-2a-20 & a-2 \\ \hline \underline{-6a^2+12a\quad} & 6a+10 \\ 10a-20 & \\ \underline{-10a+20} & \\ 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es el último divisor, $a-2$;

$\therefore\quad (6a^2-2a-20,\ 2a^3-a^2-6a)=a-2.$

3. $5a^3-6a^2x+ax^2$ y $3a^3-4a^2x+ax^2$

Solución:

Sea

$5a^3-6a^2x+ax^2=a(5a^2-6ax+x^2)$: dividendo

$3a^3-4a^2x+ax^2=a(3a^2-4ax+x^2)$: divisor

Ya encontramos el primer factor del m.c.d., a. Hallemos el otro, ordenando los polinomios, en forma descendente, con respecto a x, y efectuando las divisiones sucesivas:

Multiplicamos el dividendo por 3 y lo dividimos por a, y efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} x^2-6ax+5a^2 & x^2-4ax+3a^2 \\ \hline \underline{-x^2+4ax-3a^2} & 1 \\ -2ax+2a^2 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de multiplicar el residuo por $-1/2a$:

$$\begin{array}{r|l} x^2-4ax+3a^2 & x-a \\ \hline \underline{-x^2+ax\quad} & x-3a \\ -3ax+3a^2 & \\ \underline{3ax-3a^2} & \\ 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el último divisor, $x-a$, también hace parte del m.c.d.

Los factores comunes son a y $x-a$, y su producto es $a(x-a)$;

$\therefore\quad (5a^3-6a^2x+ax^2,\ 3a^3-4a^2x+ax^2)=a(x-a).$

4. $2x^3 + 4x^2 - 4x + 6 \quad \text{y} \quad x^3 + x^2 - x + 2$

<u>Solución</u>:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 4x^2 - 4x + 6 & x^3 + x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 - 2x^2 + 2x - 4} & 2 \\ 2x^2 - 2x + 2 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el residuo por 2:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - x + 2 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 + x^2 - x \quad\;\;} & x + 2 \\ 2x^2 - 2x + 2 & \\ \underline{-2x^2 + 2x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es el último divisor, $x^2 - x + 1$;

$\therefore \quad (2x^3 + 4x^2 - 4x + 6, x^3 + x^2 - x + 2) = x^2 - x + 1.$

5. $8a^4 - 6a^3x + 7a^2x^2 - 3ax^3 \quad \text{y} \quad 2a^3 + 3a^2x - 2ax^2$

<u>Solución</u>:

Sea

$8a^4 - 6a^3x + 7a^2x^2 - 3ax^3 = a(8a^3 - 6a^2x + 7ax^2 - 3x^3)$: dividendo

$2a^3 + 3a^2x - 2ax^2 = a(2a^2 + 3ax - 2x^2)$: divisor

Ya encontramos el primer factor del m.c.d., a. Hallemos el otro efectuando las divisiones sucesivas:

Multiplicamos el dividendo por 3 y lo dividimos por a, y efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} 8a^3 - 6a^2x + 7ax^2 - 3x^3 & 2a^2 + 3ax - 2x^2 \\ \cline{2-2} \underline{-8a^3 - 12a^2x + 8ax^2 \qquad\;} & 4a - 9x \\ -18a^2x + 15ax^2 - 3x^3 & \\ \underline{18a^2x + 27ax^2 - 18x^3} & \\ 42ax^2 - 21x^3 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el residuo por $21x^2$:

$$\begin{array}{r|l} 2a^2 + 3ax - 2x^2 & 2a - x \\ \cline{2-2} \underline{-2a^2 + ax \qquad\;} & a + 2x \\ 4ax - 2x^2 & \\ \underline{-4ax + 2x^2} & \\ 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el último divisor, $2a - x$, también hace parte del m.c.d.

Los factores comunes son a y $2a - x$, y su producto es $a(2a - x)$;

$\therefore \quad (8a^4 - 6a^3x + 7a^2x^2 - 3ax^3, 2a^3 + 3a^2x - 2ax^2) = a(2a - x).$

6. $12ax^4-3ax^3+26ax^2-5ax+10a$ y $3x^4+3x^3-4x^2+5x-15$

<u>Solución</u>:

Sea

$12ax^4-3ax^3+26ax^2-5ax+10a=a(12x^4-3x^3+26x^2-5x+10)$: dividendo

$3x^4+3x^3-4x^2+5x-15$: divisor

Dividimos el dividendo por a, y efectuamos la división:

$$
\begin{array}{r|l}
12x^4-3x^3+26x^2-5x+10 & 3x^4+3x^3-4x^2+5x-15 \\ \cline{2-2}
-12x^4-12x^3+16x^2-20x+60 & 4 \\ \cline{1-1}
-15x^3+42x^2-25x+70 &
\end{array}
$$

Como la división no es exacta, multilplicamos el divisor por 5, y el resultado, lo dividimos por el residuo:

$$
\begin{array}{r|l}
15x^4+15x^3-20x^2+25x-75 & -15x^3+42x^2-25x+70 \\ \cline{2-2}
-15x^4+42x^3-25x^2+70x & -x-\dfrac{19}{5} \\ \cline{1-1}
57x^3-45x^2+95x-75 & \\
-57x^3+\dfrac{798}{5}x^2-95x+266 & \\ \cline{1-1}
\dfrac{573}{5}x^2\qquad+191 &
\end{array}
$$

Como la división no es exacta, dividimos el último divisor por el resultado de multilplicar el residuo por 5/191:

$$
\begin{array}{r|l}
-15x^3+42x^2-25x+70 & 3x^2+5 \\ \cline{2-2}
15x^3\qquad+25x & -5x+14 \\ \cline{1-1}
42x^2\qquad+70 & \\
-42x^2\qquad-70 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es el último divisor, $3x^2+5$;

$\therefore\quad (12ax^4-3ax^3+26ax^2-5ax+10a,\ 3x^4+3x^3-4x^2+5x-15)=3x^2+5$.

7. $3x^3-2x^2y+9xy^2-6y^3$ y $6x^4-4x^3y-3x^2y^2+5xy^3-2y^4$

<u>Solución</u>:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4-4x^3y-3x^2y^2+5xy^3-2y^4 & 3x^3-2x^2y+9xy^2-6y^3 \\ \cline{2-2}
-6x^4+4x^3y-18x^2y^2+12xy^3 & 2x \\ \cline{1-1}
-21x^2y^2+17xy^3-2y^4 &
\end{array}
$$

Como la división no es exacta, multiplicamos el divisor por 7; y el resultado lo dividimos por el resultado de dividir el residuo por y^2:

$$
\begin{array}{r|l}
21x^3-14x^2y+63xy^2-42y^3 & -21x^2+17xy-2y^2 \\ \cline{2-2}
-21x^3+17x^2y-2xy^2 & -x-\dfrac{1}{7}y \\ \cline{1-1}
3x^2y+61xy^2-42y^3 & \\
-3x^2y+\dfrac{17}{7}xy^2-\dfrac{2}{7}y^3 & \\ \cline{1-1}
\dfrac{444}{7}xy^2-\dfrac{296}{7}y^3 &
\end{array}
$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de multiplicar el residuo por $7/148y^2$:

$$
\begin{array}{r|l}
-21x^2+17xy-2y^2 & 3x-2y \\ \cline{2-2}
21x^2-14xy & -7x+y \\ \cline{1-1}
3xy-2y^2 & \\
-3xy+2y^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es el último divisor, $3x-2y$;

$\therefore\quad (3x^3-2x^2y+9xy^2-6y^3,\ 6x^4-4x^3y-3x^2y^2+5xy^3-2y^4)=3x-2y$.

M á x i m o   c o m ú n   d i v i s o r

Máximo común divisor de tres o más polinomios por divisiones sucesivas

Procedimiento

1. Se halla, por divisiones sucesivas, el m.c.d. de dos de los polinomios dados
2. Hallamos, por divisiones sucesivas, el m.c.d. del tercer polinomio y el m.c.d. hallado en el paso anterior; éste será el m.c.d. de los tres polinomios.
Para hallar, por divisiones sucesivas, el m.c.d. entre dos polinomios, se procede de la siguiente manera:
a. Se ordenan los polinomios con relación a una misma letra
b. Si es posible, se factorizan los polinomios; los factores comunes a ambos polinomios harán parte del m.c.d.
c. Se divide el polinomio de mayor grado entre el de menor grado
d. Si la división es exacta, el divisor es el m.c.d.
e. Si la división no es exacta, se divide el divisor por el primer residuo, éste por el segundo residuo y así sucesivamente hasta llegar a una división exacta
f. El último divisor es el m.c.d. buscado
Nota1: todas las divisiones deben continuarse hasta que el primer término del residuo se de grado inferior al primer término del divisor
Nota2: durante el proceso, se puede dividir o multiplicar el dividendo, o el divisor o el residuo por un factor cualquiera.

Nota3: la simbología para denotar el m.c.d., k, de los números (polinomios) a, b, ... es la siguiente:
$(a, b, ...) = k$.

Hallar, por divisiones sucesivas, el m.c.d. de:

1. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6,\ 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$ y $2x^2 - 5x - 3$

<u>Solución</u>:

Hallemos el m.c.d. de los dos últimos polinomios:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 & 2x^2 - 5x - 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 5x^2 + 3x} & x \\ -3x + 9 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el residuo multiplicado por $-1/3$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x - 3 & x - 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2 + 6x} & 2x + 1 \\ x - 3 & \\ \underline{-x + 3} & \\ 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. de los dos últimos polinomios, es el último divisor: $x - 3$.

Ahora, dividimos el primer polinomio por $x - 3$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 + 3x^2} & x^2 + x - 2 \\ x^2 - 5x & \\ \underline{-x^2 + 3x} & \\ -2x + 6 & \\ \underline{2x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el último divisor, $x - 3$, es el m.c.d. del primer polinomio y el m.c.d. de los otros dos polinomios; por lo tanto, $x - 3$ es el m.c.d. de los tres polinomios:

$\therefore\quad (x^3 - 2x^2 - 5x + 6,\ 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9\ \text{ y }\ 2x^2 - 5x - 3) = x - 3.$

2. $2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3$, $8x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - y^3$ y $6x^2 - xy - y^2$

Solución:

Hallemos el m.c.d. de los dos primeros polinomios:

$$\begin{array}{l|l} 8x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - y^3 & 2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 \\ \cline{2-2} \underline{-8x^3 + 4x^2y + 8xy^2 - 4y^3} & 4 \\ \quad 10x^2y + 5xy^2 - 5y^3 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el residuo dividido por $5y$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 & 2x^2 + xy - y^2 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 - x^2y + xy^2} & x - 1 \\ \quad -2x^2y - xy^2 + y^3 & \\ \quad \underline{2x^2y + xy^2 - y^3} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. de los dos primeros polinomios, es el último divisor: $2x^2 + xy - y^2$.

Ahora, dividimos el tercer polinomio por $2x^2 + xy - y^2$:

$$\begin{array}{l|l} 6x^2 - xy - y^2 & 2x^2 + xy - y^2 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^2 - 3xy + 3y^2} & 3 \\ \quad -4xy + 2y^2 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el último divisor por el resultado de dividir el residuo por $-2y$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + xy - y^2 & 2x - y \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2 + xy} & x + y \\ \quad 2xy - y^2 & \\ \quad \underline{-2xy - y^2} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el último divisor, $2x - y$, es el m.c.d. del tercer polinomio y el m.c.d. de los otros dos polinomios; por lo tanto, $2x - y$ es el m.c.d. de los tres polinomios:

$\therefore \quad (2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3,\ 8x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - y^3,\ 6x^2 - xy - y^2) = 2x - y$.

3. $x^4 + x^3 - x^2 - x,\ 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ y $5x^3 - 5x^2 + 2x - 2$

<u>Solución</u>:

Hallemos el m.c.d. de los dos primeros polinomios (previamente dividimos el segundo polinomio por 2):

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 - x^2 - x & x^3 + x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4 - x^3 + x^2 + x} & x \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. de los dos primeros polinomios, es el divisor: $x^3 + x^2 - x - 1$

Ahora, dividimos el tercer polinomio por $x^3 + x^2 - x - 1$:

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 - 5x^2 + 2x - 2 & x^3 + x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-5x^3 - 5x^2 + 5x + 5} & 5 \\ \quad -10x^2 + 7x + 3 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el último divisor (previamente multiplicado por 10) por el resultado de multiplicar el residuo por -1:

$$\begin{array}{l|l} 10x^3 + 10x^2 - 10x - 10 & 10x^2 - 7x - 3 \\ \cline{2-2} \underline{-10x^3 + 7x^2 + 3x} & x + \frac{17}{10} \\ \qquad 17x^2 - 7x - 10 & \\ \qquad \underline{-17x^2 + \frac{119}{10}x + \frac{51}{10}} & \\ \qquad\qquad \frac{49}{10}x - \frac{49}{10} & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el último divisor por el resultado de multiplicar el residuo por $10/49$:

$$\begin{array}{l|l} 10x^2 - 7x - 3 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-10x^2 + 10x} & 10x + 3 \\ \qquad 3x - 3 & \\ \qquad \underline{-3x + 3} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, el último divisor, $x - 1$, es el m.c.d. del tercer polinomio y el m.c.d. de los otros dos polinomios; por lo tanto, $x - 1$ es el m.c.d. de los tres polinomios:

$\therefore \quad (x^4 + x^3 - x^2 - x,\ 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2,\ 5x^3 - 5x^2 + 2x - 2) = x - 1.$

4. $3a^4+9a^3x+4a^2x^2-3ax^3+2x^4,\ a^4+3a^3x+a^2x^2-3ax^3-2x^4$ y $4a^3+8a^2x-ax^2-2x^3$

<u>Solución</u>:

Hallemos el m.c.d. de los dos primeros polinomios (previamente dividimos el segundo polinomio por 2):

$$\begin{array}{r|l}
3a^4+9a^3x+4a^2x^2-3ax^3+2x^4 & a^4+3a^3x+a^2x^2-3ax^3-2x^4 \\ \cline{2-2}
\underline{-3a^4-9a^3x-3a^2x^2+9ax^3+6x^4} & 3 \\
a^2x^2+6ax^3+8x^4 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el último divisor por el resultado de dividir el residuo por x^2 :

$$\begin{array}{r|l}
a^4+3a^3x+a^2x^2-3ax^3-2x^4 & a^2+6ax+8x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{-a^4-6a^3x-8a^2x^2} & a^2-3ax+11x^2 \\
-3a^3x-7a^2x^2-3ax^3-2x^4 & \\
\underline{3a^3x+18a^2x^2+24ax^3} & \\
11a^2x^2+21ax^3-2x^4 & \\
\underline{-11a^2x^2-66ax^3-88x^4} & \\
-45ax^3-90x^4 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el último divisor por el resultado de dividir el residuo por $-45x^3$:

$$\begin{array}{r|l}
a^2+6ax+8x^2 & a+2x \\ \cline{2-2}
\underline{-a^2-2ax} & a+4 \\
4ax+8x^2 & \\
\underline{-4ax-8x^2} & \\
0 &
\end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. de los dos primeros polinomios, es el último divisor, $a+2x$

Ahora, dividimos el tercer polinomio por $a+2x$:

$$\begin{array}{r|l}
4a^3+8a^2x-ax^2-2x^3 & a+2x \\ \cline{2-2}
\underline{-4a^3-8a^2x} & 4a^2+x^2 \\
-ax^2-2x^3 & \\
\underline{ax^2+2x^3} & \\
0 &
\end{array}$$

Como la división es exacta, el último divisor, $a+2x$, es el m.c.d. del tercer polinomio y el m.c.d. de los otros dos polinomios; por lo tanto, $a+2x$ es el m.c.d. de los tres polinomios:

$\therefore \quad (3a^4+9a^3x+4a^2x^2-3ax^3+2x^4,\ a^4+3a^3x+a^2x^2-3ax^3-2x^4,\ 4a^3+8a^2x-ax^2-2x^3)=a+2x.$

5. $2x^5+2x^4-2x^2-2x,\ 3x^6-4x^4-3x^3+4x\ \text{ y }\ 4x^4-4x^3+3x^2-3x$

<u>Solución</u>:

Hallemos el m.c.d. de los dos primeros polinomios (previamente dividimos el primer polinomio por 2):

$$
\begin{array}{l|l}
3x^6 \qquad -4x^4-3x^3 \qquad +4x & x^5+x^4-x^2-x \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^6-3x^5 \qquad +3x^3+3x^2} & 3x-3 \\
\quad -3x^5-4x^4 \qquad +3x^2+4x & \\
\quad \underline{3x^5+3x^4 \qquad -3x^2-3x} & \\
\qquad -x^4 \qquad\qquad +x &
\end{array}
$$

Como la división no es exacta, dividimos el último divisor por el resultado de dividir el residuo por -1:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+x^4-x^2-x & x^4-x \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5 \qquad +x^2} & x+1 \\
\quad x^4 \qquad -x & \\
\quad \underline{-x^4 \qquad +x} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Como la división es exacta, el m.c.d. de los dos primeros polinomios, es el último divisor, x^4-x

Ahora, dividimos el tercer polinomio por x^4-x :

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4-4x^3+3x^2-3x & x^4-x \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^4 \qquad\qquad +4x} & 4 \\
\quad -4x^3+3x^2 \quad +x &
\end{array}
$$

Como la división no es exacta, dividimos el último divisor (previamente multiplicado por 4) por el residuo (previamente multiplicado por -1):

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4 \qquad\qquad -4x & 4x^3-3x^2-x \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^4+3x^3+x^2} & x+\dfrac{3}{4} \\
\quad 3x^3 \quad +x^2 \quad -4x & \\
\quad \underline{-3x^3+\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{3}{4}x} & \\
\qquad \dfrac{13}{4}x^2-\dfrac{13}{4}x &
\end{array}
$$

Como la división no es exacta, dividimos el último divisor por el resultado de multiplicar el residuo por $4/13$:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3-3x^2-x & x^2-x \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^3+4x^2} & 4x+1 \\
\quad x^2-x & \\
\quad \underline{-x^2+x} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Como la división es exacta, el último divisor, x^2-x, es el m.c.d. del tercer polinomio y el m.c.d. de los otros dos polinomios; por lo tanto, x^2-x es el m.c.d. de los tres polinomios:

$\therefore \quad (2x^5+2x^4-2x^2-2x,\ 3x^6-4x^4-3x^3+4x,\ 4x^4-4x^3+3x^2-3x) = x^2-x.$

115

Mínimo común múltiplo

M.C.M. de monomios

Procedimiento

1. Se halla el M.C.M de los coeficientes numéricos. Para lo cual, si es necesario, se descomponen en sus factores primos; y el M.C. M. será el producto de los factores comunes y no comunes y con el mayor exponente
2. Se Halla el M.C.M. de la parte literal; el cual es el producto indicado de las letras comunes y no comunes y con el mayor exponente
3. El M.C.M. de las expresiones será entonces el producto indicado del mínimo común múltiplo de la parte numérica y el de la parte literal
Nota: la notación utilizada para expresar el M.C.M., *z*, de las expresiones *a*, *b*, ... es
$[a,\ b,\ \ldots] = z$

Hallar el M.C.M. de:

1. $a^2,\ ab^2$

Solución:

Las letras que aparecen en una cualquiera de las expresiones son a y b, y el mayor exponente con que aparecen es 2; de tal manera que:

$$[a^2,\ ab^2] = a^2b^2.$$

2. $x^2y,\ xy^2$

Solución:

Las letras que aparecen en una cualquiera de las expresiones son x y y, y el mayor exponente con que aparecen es 2; de tal manera que:

$$[x^2y,\ xy^2] = x^2y^2.$$

3. $ab^2c,\ a^2bc$

Solución:

Las letras que aparecen en una cualquiera de las expresiones son a,b y c, y el mayor exponente con que aparecen es, para a 2, para b 2, y para c 1; de tal manera que:

$$[ab^2c,\ a^2bc] = a^2b^2c.$$

4. $a^2x^3,\ a^3bx^2$

Solución:

Las letras que aparecen en una cualquiera de las expresiones son a,b y x, y el mayor exponente con que aparecen es, para a 3, para b 1, y para x 3; de tal manera que:

$$[a^2x^3,\ a^3bx^2] = a^3bx^3.$$

5. $6m^2n,\ 4m^3$

Solución:

$[4,6] = 12$

Las letras que aparecen en una cualquiera de las expresiones son m y n, y el mayor exponente con que aparecen es, para m 3, y para n 1; de tal manera que:

$[6m^2n,\ 4m^3] = 12m^3n.$

6. $9ax^3y^4,\ 15x^2y^5$

Solución:

$[9,\ 15] = 45$

Las letras que aparecen en una cualquiera de las expresiones son a, x y y, y el mayor exponente con que aparecen es, para a 1, para x 3, para y 5; de tal manera que:

$[9ax^3y^4,\ 15x^2y^5] = 45ax^3y^5.$

7. $a^3, ab^2,\ a^2b$

Solución:

Las letras que aparecen en una cualquiera de las expresiones son a y b, y el mayor exponente con que aparecen es, para a 3, para b 2; de tal manera que:

$[a^3, ab^2,\ a^2b] = a^3b^2.$

8. $x^2y,\ xy^2, xy^3z$

Solución:

Las letras que aparecen en una cualquiera de las expresiones son x, y y z, y el mayor exponente con que aparecen es, para x 2, para y 3, y para z 1; de tal manera que:

$[x^2y,\ xy^2, xy^3z] = x^2y^3z.$

9. $2ab^2,\ 4a^2b,\ 8a^3$

Solución:

$[2,4,8] = 8$

Las letras que aparecen en una cualquiera de las expresiones son a y b, y el mayor exponente con que aparecen es, para a 3, y para b 2; de tal manera que:

$[2ab^2,\ 4a^2b,\ 8a^3] = 8a^3b^2.$

Procedimiento

1. Se factorizan los polinomios
2. Se halla el M.C.M de los coeficientes numéricos. Para lo cual, si es necesario, se descomponen en sus factores primos; y el M.C. M. será el producto de los factores comunes y no comunes y con el mayor exponente
2. Se Halla el M.C.M. de los otros factores; el cual es el producto indicado de los factores comunes y no comunes y con el mayor exponente
3. El M.C.M. de las expresines será entonces el producto indicado del mínimo común múltiplo de la parte numérica y el de los otros factores
Nota: la notación utilizada para expresar el M.C.M., *z*, de las expresiones *a*, *b*, ... es
$[a, b, \ldots] = z$

Hallar el M.C.M. de:

1. $2a,\ 4x-8$

Solución:

Factorizamos el polinomio:

$2a,\ 4(x-2)$

$[2,4]=4$

No hay factores comunes en los otros factores; de tal manera que:

$[2a,\ 4x-8] = 4a(x-2).$

Procedimiento

1. Se halla el M.C.M. de los coeficientes numéricos
2. Se factorizan los polinomios
2. El M.C.M. se calcula mediante el producto de los factores primos, comunes y no comunes, y con su mayor exponente

2. $3b^2,\ ab-b^2$

Solución:

Factorizamos el polinomio:

$3b^2,\ b(a-b)$

El mayor exponente del factor común b es 2; de tal manera que:

$[3b^2,\ ab-b^2] = 3b^2(a-b).$

Hallar el M.C.M. de:

3. $x^2y,\ x^2y+xy^2$

1. $3x+3,\ 6x-6$

Solución:

Factorizamos los polinomios:

$3x+3 = 3(x+1)$ y $6x-6 = 6(x-1)$;

común y es 1; de tal manera que:

$\therefore \quad M.C.M.[3x+3,\ 6x-6] = 6(x+1)(x-1) = 6(x^2-1)$

4. $8,\ 4+8a$

Solución:

Factorizamos el polinomio:

$8,\ 4(1+2a)$

$[4,8]=8$

De tal manera que:

$[8,\ 4+8a] = 8(1+2a).$

6. $a^3 + a^2b,\ a^3 + 2a^2b + ab^2$

<u>Solución</u>:

Factorizamos los polinomios:

$$a^3 + a^2b = a^2(a + b) \quad \text{y} \quad a^3 + 2a^2b + ab^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) = a(a + b)^2.$$

Los factores comunes son a y $(a + b)$, y el mayor exponente con que aparecen son a^2 y $(a + b)^2$;

$\therefore \quad M.C.M.[a^3 + a^2b,\ a^3 + 2a^2b + ab^2] = a^2(a + b)^2.$

12. $x^3 - y^3,\ (x - y)^3$

<u>Solución</u>:

Factorizamos los polinomios:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

y $\quad (x - y)^3$

El factor común es $(x - y)$, y el mayor exponente con que aparece es $(x - y)^3$

El factor no común es $(x^2 + xy + y^2)$;

$\therefore \quad M.C.M.[x^3 - y^3,\ (x - y)^3] = (x - y)^3(x^2 + xy + y^2).$

18. $5(x + y)^2,\ 10(x^2 + y^2)$

<u>Solución</u>:

El M.C.M. de los factores numéricos es 10

Los factores no comunes son $(x + y)^2$ y $(x^2 + y^2)$;

$\therefore \quad M.C.M.[5(x + y)^2,\ 10(x^2 + y^2)] = 10(x + y)^2(x^2 + y^2).$

24. $6a^2 + 13a + 6,\ 3a^2 + 14a + 8,\ 4 + 12a + 9a^2$

<u>Solución</u>:

Factorizamos los polinomios:

$$6a^2 + 13a + 6 = (2a + 3)(3a + 2)$$

$$3a^2 + 14a + 8 = (a + 4)(3a + 2)$$

$y \quad 4 + 12a + 9a^2 = (3a + 2)^2$

El factor común es $(3a + 2)$, y el mayor exponente con que aparece es $(3a + 2)^2$

Los factores no comunes son $(2a + 3)$ y $(a + 4)$;

$\therefore \quad M.C.M.[6a^2 + 13a + 6,\ 3a^2 + 14a + 8,\ 4 + 12a + 9a^2] = (2a + 3)(a + 4)(3a + 2)^2.$

30. $2m^2+2mn,\ 4mn-4n^2,\ 6m^3n-6mn^3$

Solución:

Factorizamos los polinomios:

$$2m^2+2mn=2m(m+n)$$
$$4mn-4n^2=4n(m-n)$$
$$6m^3n-6mn^3=6mn(m^2-n^2)=6mn(m+n)(m-n)$$

El M.C.M. de los factores numéricos es 12

Los factores no comunes son $m,\ n,\ (m+n)$ y $(m-n)$;

$\therefore\quad M.C.M.[2m^2+2mn,\ 4mn-4n^2,\ 6m^3n-6mn^3]=12mn(m+n)(m-n)=12mn(m^2-n^2).$

36. $12mn+8m-3n-2,\ 48m^2n-3n+32m^2-2,\ 6n^2-5n-6$

Solución:

Factorizamos los polinomios:

$$12mn+8m-3n-2=4m(3n+2)-(3n+2)=(3n+2)(4m-1)$$
$$48m^2n-3n+32m^2-2=16m^2(3n+2)-(3n+2)=(3n+2)(16m^2-1)=(3n+2)(4m+1)(4m-1)$$
$$6n^2-5n-6=(2n-3)(3n+2)$$

El factor común es $(3n+2)$

Los factores no comunes son $(4m-1),\ (4m+1),\ (2n-3)$;

$\therefore\quad M.C.M.[12mn+8m-3n-2,\ 48m^2n-3n+32m^2-2,\ 6n^2-5n-6]=(3n+2)(4m-1)(4m+1)(2n-3)=.$
$(3n+2)(2n-3)(16m^2-1).$

42. $12x^2+5xy-2y^2,\ 15x^2+13xy+2y^2,\ 20x^2-xy-y^2$

Solución:

Factorizamos los polinomios:

$$12x^2+5xy-2y^2=(3x+2y)(4x-y)$$
$$15x^2+13xy+2y^2=(3x+2y)(5x+y)$$
$$20x^2-xy-y^2=(4x-y)(5x+y)$$

Los facores no comunes son $(3x+2y),\ (4x-y),\ (5x+y)$

$\therefore\quad M.C.M.[12x^2+5xy-2y^2,\ 15x^2+13xy+2y^2,\ 20x^2-xy-y^2]=(3x+2y)(4x-y)(5x+y).$

48. $m^3-27n^3,\ m^2-9n^2,\ m^2-6mn+9n^2,\ m^2+3mn+9n^2$

Solución:

Factorizamos los polinomios:

$$m^3-27n^3=(m-3n)(m^2+3mn+9n^2)$$
$$m^2-9n^2=(m+3n)(m-3n)$$
$$m^2-6mn+9n^2=(m-3n)^2$$
$$m^2+3mn+9n^2$$

Los factores comunes y no comunes y con el mayor exponente son $(m+3n),\ (m-3n)^2,\ (m^2+3mn+9n^2)$;

$\therefore\quad M.C.M.[m^3-27n^3,\ m^2-9n^2,\ m^2-6mn+9n^2,\ m^2+3mn+9n^2]=(m+3n)(m-3n)^2(m^2+3mn+9n^2).$

18

Fracciones algebraicas

Simplificación de fracciones

P r o c e d i m i e n t o
1. Se transforma el numerador y denominador con el propósito de identificar los factores comunes **2.** Se cancelan los factores comunes en numerador y denominador

Simplificar o reducir a su más simple expresión:

1. $\frac{a^2}{ab}$

16. $\frac{54x^9y^{11}z^{13}}{63x^{10}y^{12}z^{15}}$

Solución:

$$\frac{54x^9y^{11}z^{13}}{63x^{10}y^{12}z^{15}}=\frac{9\times 6x^9y^{11}z^{13}}{9\times 7\times x^9x\times y^{11}y\times z^{13}z^2}=\frac{\cancel{9}\times 6\cancel{x^9}\cancel{y^{11}}\cancel{z^{13}}}{\cancel{9}\times 7\times \cancel{x^9}x\times \cancel{y^{11}}y\times \cancel{z^{13}}z^2};$$

$$\therefore\quad \frac{54x^9y^{11}z^{13}}{63x^{10}y^{12}z^{15}}=\frac{6}{7xyz^2}.$$

17. $\frac{15a^{12}b^{15}c^{20}}{75a^{11}b^{16}c^{22}}$

Solución:

$$\frac{15a^{12}b^{15}c^{20}}{75a^{11}b^{16}c^{22}}=\frac{15a^{11}ab^{15}c^{20}}{5\times 15\times a^{11}\times b^{15}b\times c^{20}\times c^2}=\frac{\cancel{15}\cancel{a^{11}}a\cancel{b^{15}}\cancel{c^{20}}}{5\times \cancel{15}\times \cancel{a^{11}}\times \cancel{b^{15}}b\times \cancel{c^{20}}\times c^2};$$

$$\therefore\quad \frac{15a^{12}b^{15}c^{20}}{75a^{11}b^{16}c^{22}}=\frac{a}{5bc^2}.$$

18. $\frac{75a^7m^5}{100a^3m^{12}n^3}$

Solución:

$$\frac{75a^7m^5}{100a^3m^{12}n^3}=\frac{3\times 25\times a^3a^4m^5}{4\times 25\times a^3\times m^5m^7n^3}=\frac{3\times \cancel{25}\times \cancel{a^3}a^4\cancel{m^5}}{4\times \cancel{25}\times \cancel{a^3}\times \cancel{m^5}m^7n^3};$$

$$\therefore\quad \frac{75a^7m^5}{100a^3m^{12}n^3}=\frac{3a^4}{4m^7n^3}.$$

4. $\frac{ax^3}{4x^5y}$ **119**

Solución:

$$\frac{ax^3}{4x^5y}=\frac{ax^3}{4x^2\times x^3y}=\frac{a\cancel{x^3}}{4x^2\times \cancel{x^3}y};$$

$$\therefore\quad \frac{ax^3}{4x^5y}=\frac{a}{4x^2y}.$$

Simplificación de fracciones

Simplificación de fracciones cuyos términos sean polinomios

P r o c e d i m i e n t o

1. Se factorizan los polinomios en el numerador y denominador
2. Se simplifican las expresiones, suprimiendo los factores comunes en el numerador y denominador

Simplificar o reducir a su más simple expresión:

1. $\dfrac{3ab}{2a^2x+2a^3}$

S o l u c i ó n :

$$\Rightarrow \quad \frac{3ab}{2a^2x+2a^3} = \frac{3ab}{2a^2(x+a)} \qquad \{\text{factorizando el denominador}\};$$

$$\therefore \quad \frac{3ab}{2a^2x+2a^3} = \frac{3b}{2a(x+a)} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

2. $\dfrac{xy}{3x^2y-3xy^2}$

S o l u c i ó n :

$$\Rightarrow \quad \frac{xy}{3x^2y-3xy^2} = \frac{xy}{3xy(x-y)} \qquad \{\text{factorizando el denominador}\};$$

$$\therefore \quad \frac{xy}{3x^2-3xy^2} = \frac{1}{3(x-y)} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

3. $\dfrac{2ax+4bx}{3ay+6by}$

S o l u c i ó n :

$$\Rightarrow \quad \frac{2ax+4bx}{3ay+6by} = \frac{2x(a+2b)}{3y(a+2b)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{2ax+4bx}{3ay+6by} = \frac{2x}{3y} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

4. $\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-2x-3}{x-3}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-2x-3}{x-3}=x+1 \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

5. $\dfrac{10a^2b^3c}{80(a^3-a^2b)}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{10a^2b^3c}{80(a^3-a^2b)}=\frac{10a^2b^3c}{80a^2(a-b)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{10a^2b^3c}{80(a^3-a^2b)}=\frac{b^3c}{8(a-b)} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

6. $\dfrac{x^2-4}{5ax+10a}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-4}{5ax+10a}=\frac{(x-2)(x+2)}{5a(x+2)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-4}{5ax+10a}=\frac{x-2}{5a} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

7. $\dfrac{3x^2-4x-15}{x^2-5x+6}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{3x^2-4x-15}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(3x+5)}{(x-3.)(x-2)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2-4x-15}{x^2-5x+6}=\frac{3x+5}{x-2} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

8. $\dfrac{15a^2bn-45a^2bm}{10a^2b^2n-30a^2b^2m}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{15a^2bn-45a^2bm}{10a^2b^2n-30a^2b^2m}=\frac{15a^2b(n-3m)}{10a^2b^2(n-3m)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{15a^2bn-45a^2bm}{10a^2b^2n-30a^2b^2m}=\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\,\cancel{a^2}\,\cancel{b}\,\cancel{(n-3m)}}{\underset{2}{\cancel{10}}\,\cancel{a^2}\,b^{\cancel{2}}\,\cancel{(n-3m)}}=\frac{3}{2b} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

9. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{2}}}=\frac{x-y}{x+y} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

10. $\dfrac{3x^2y+15xy}{x^2-25}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{3x^2y+15xy}{x^2-25}=\frac{3xy(x+5)}{(x-5)(x+5)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2y+15xy}{x^2-25}=\frac{3xy\cancel{(x+5)}}{(x-5)\cancel{(x+5)}}=\frac{3xy}{x-5} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

11. $\dfrac{a^2-4ab+4b^2}{a^3-8b^3}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2-4ab+4b^2}{a^3-8b^3}=\frac{(a-2b)^2}{(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a^2-4ab+4b^2}{a^3-8b^3}=\frac{(a-2b)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-2b)}(a^2+2ab+4b^2)}=\frac{a-2b}{a^2+2ab+4b^2} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

12. $\dfrac{x^3+4x^2-21x}{x^3-9x}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3+4x^2-21x}{x^3-9x}=\frac{x(x^2+4x-21)}{x(x^2-9)}=\frac{x(x+7)(x-3)}{x(x+3)(x-3)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x^3+4x^2-21x}{x^3-9x}=\frac{\cancel{x}(x+7)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x}(x+3)\cancel{(x-3)}}=\frac{x+7}{x+3} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

13. $\dfrac{6x^2+5x-6}{15x^2-7x-2}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{6x^2+5x-6}{15x^2-7x-2}=\frac{(2x+3)(3x-2)}{(3x-2)(5x+1)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{6x^2+5x-6}{15x^2-7x-2}=\frac{(2x+3)\cancel{(3x-2)}}{\cancel{(3x-2)}(5x+1)}=\frac{2x+3}{5x+1} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

14. $\dfrac{a^3+1}{a^4-a^3+a-1}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{a^3+1}{a^4-a^3+a-1}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{(a+1)(a-1)(a^2-a+1)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a^3+1}{a^4-a^3+a-1}=\frac{\cancel{(a+1)}\,\cancel{(a^2-a+1)}}{\cancel{(a+1)}\,(a-1)\,\cancel{(a^2-a+1)}}=\frac{1}{a-1} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
 & -1 & 2 & -2 & 1 & \\
\hline
1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 & & \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

15. $\dfrac{2ax+ay-4bx-2by}{ax-4a-2bx+8b}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{2ax+ay-4bx-2by}{ax-4a-2bx+8b}=\frac{a(2x+y)-2b(2x+y)}{a(x-4)-2b(x-4)}=\frac{(2x+y)(a-2b)}{(x-4)(a-2b)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{2ax+ay-4bx-2by}{ax-4a-2bx+8b}=\frac{(2x+y)\,\cancel{(a-2b)}}{(x-4)\,\cancel{(a-2b)}}=\frac{2x+y}{x-4} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

16. $\dfrac{a^2-ab-6b^2}{a^3x-6a^2bx+9ab^2x}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2-ab-6b^2}{a^3x-6a^2bx+9ab^2x}=\frac{(a-3b)(a+2b)}{ax(a-3b)^2} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a^2-ab-6b^2}{a^3x-6a^2bx+9ab^2x}=\frac{\cancel{(a-3b)}\,(a+2b)}{ax(a-3b)^{\cancel{2}}}=\frac{a+2b}{ax(a-3b)} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

17. $\dfrac{m^2+n^2}{m^4-n^4}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{m^2+n^2}{m^4-n^4}=\frac{(m^2+n^2)}{(m^2+n^2)(m^2-n^2)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{m^2+n^2}{m^4-n^4}=\frac{\cancel{(m^2+n^2)}}{\cancel{(m^2+n^2)}\,(m^2-n^2)}=\frac{1}{m^2-n^2} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

18. $\dfrac{x^3+y^3}{(x+y)^3}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3+y^3}{(x+y)^3}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)^3} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x^3+y^3}{(x+y)^3}=\frac{\cancel{(x+y)}\,(x^2-xy+y^2)}{(x+y)^{\cancel{3}}}=\frac{x^2-xy+y^2}{(x+y)^2} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

19. $\dfrac{(m-n)^2}{m^2-n^2}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{(m-n)^2}{m^2-n^2}=\frac{(m-n)^2}{(m-n)(m+n)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{(m-n)^2}{m^2-n^2}=\frac{(m-n)^{\cancel{2}}}{\cancel{(m-n)}\,(m+n)}=\frac{m-n}{m+n} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

20. $\dfrac{(a-x)^3}{a^3-x^3}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{(a-x)^3}{a^3-x^3}=\frac{(a-x)^3}{a^3-x^3} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{(a-x)^3}{a^3-x^3}=\frac{(a-x)^{\cancel{3}}}{\cancel{(a-x)}\,(a^2+ax+x^2)}=\frac{(a-x)^2}{a^2+ax+x^2} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

21. $\dfrac{a^2-a-20}{a^2-7a+10}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2-a-20}{a^2-7a+10}=\frac{(a-5)(a+4)}{(a-5)(a-2)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a^2-a-20}{a^2-7a+10}=\frac{\cancel{(a-5)}\,(a+4)}{\cancel{(a-5)}\,(a-2)}=\frac{a+4}{a-2} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

22. $\dfrac{(1-a^2)^2}{a^2+2a+1}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{(1-a^2)^2}{a^2+2a+1}=\frac{[(1-a)(1+a)]^2}{(a+1)^2} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{(1-a^2)^2}{a^2+2a+1}=\frac{(1-a)^2\,\cancel{(a+1)^2}}{\cancel{(a+1)^2}}=(1-a)^2 \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

23. $\dfrac{a^4b^2-a^2b^4}{a^4-b^4}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{a^4b^2-a^2b^4}{a^4-b^4}=\frac{a^2b^2(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a^4b^2-a^2b^4}{a^4-b^4}=\frac{a^2b^2\,\cancel{(a^2-b^2)}}{\cancel{(a^2-b^2)}\,(a^2+b^2)}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

24. $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}=\frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}=\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

25. $\dfrac{24a^3b+8a^2b^2}{36a^4+24a^3b+4a^2b^2}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{24a^3b+8a^2b^2}{36a^4+24a^3b+4a^2b^2}=\frac{8a^2b(3a+b)}{4a^2(9a^2+6ab+b^2)}=\frac{8a^2b(3a+b)}{4a^2(3a+b)^2} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{24a^3b+8a^2b^2}{36a^4+24a^3b+4a^2b^2}=\frac{\overset{2b}{\cancel{8a^2b}}\,\cancel{(3a+b)}}{\cancel{4a^2}(3a+b)^{\cancel{2}}}=\frac{2b}{3a+b} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

26. $\dfrac{n^3-n}{n^2-5n-6}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{n^3-n}{n^2-5n-6}=\frac{n(n^2-1)}{(n-6)(n+1)}=\frac{n(n-1)(n+1)}{(n-6)(n+1)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{n^3-n}{n^2-5n-6}=\frac{n(n-1)\cancel{(n+1)}}{(n-6)\cancel{(n+1)}}=\frac{n(n-1)}{n-6} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

27. $\dfrac{8n^3+1}{8n^3-4n^2+2n}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{8n^3+1}{8n^3-4n^2+2n}=\frac{(2n+1)(4n^2-2n+1)}{2n(4n^2-2n+1)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{8n^3+1}{8n^3-4n^2+2n}=\frac{(2n+1)\cancel{(4n^2-2n+1)}}{2n\cancel{(4n^2-2n+1)}}=\frac{2n+1}{2n} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

28. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}=\frac{[a+(b-c)][a-(b-c)]}{[(a+b)+c][(a+b)-c]}=\frac{[a+b-c][a-b+c]}{[a+b+c][a+b-c]} \qquad \{\text{factorizando, y destruyendo paréntesis}\},$$

$$\therefore \quad \frac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}=\frac{\cancel{[a+b-c]}[a-b+c]}{[a+b+c]\cancel{[a+b-c]}}=\frac{a-b+c}{a+b+c} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

29. $\dfrac{(a+b)^2-(c-d)^2}{(a+c)^2-(b-d)^2}$

<u>Solución</u>:

Factorizando, y destruyendo paréntesis:

$$\Rightarrow \quad \frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{(a+c)^2-(b-d)^2}=\frac{[(a+b)+(c-d)][(a+b)-(c-d)]}{[(a+c)+(b-d)][(a+c)-(b-d)]}=\frac{[a+b+c-d][a+b-c+d]}{[a+c+b-d][a+c-b+d]};$$

$$\therefore \quad \frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{(a+c)^2-(b-d)^2}=\frac{\cancel{[a+b+c-d]}[a+b-c+d]}{\cancel{[a+b+c-d]}[a-b+c+d]}=\frac{a+b-c+d}{a-b+c+d} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

30. $\dfrac{3x^3+9x^2}{x^2+6x+9}$

<u>Solución</u>:

$$\Rightarrow \quad \frac{3x^3+9x^2}{x^2+6x+9}=\frac{3x^2(x+3)}{(x+3)^2} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{3x^3+9x^2}{x^2+6x+9}=\frac{3x^2\cancel{(x+3)}}{(x+3)^{\cancel{2}}}=\frac{3x^2}{x+3} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

120

Simplificación de fracciones

Simplificación de fracciones cuyos términos sean polinomios. Caso en que hay que cambiar el signo a uno o más factores

Procedimiento
1. Se factorizan los polinomios en el numerador y denominador **2.** Donde sea necesario, se cambia el signo de la expresión en el numerador o en el denominador a la vez que el signo de la fracción **3.** Se simplifican las expresiones, suprimiendo los factores comunes en el numerador y denominador *<u>Nota</u>: cambiar el signo de una expresión significa cambiar el signo de todos los términos de la misma.*

Simplificar o reducir a su más simple expresión:

1. $\dfrac{4-4x}{6x-6}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{4-4x}{6x-6}=\frac{4(1-x)}{6(x-1)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

Para tener factores comunes, en el numerador y denominador, cambiamos el signo del segundo factor en el numerador y el signo de la fracción:

$$\Rightarrow \quad \frac{4-4x}{6x-6}=-\frac{4(x-1)}{6(x-1)};$$

$$\therefore \quad \frac{4-4x}{6x-6}=-\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\,\cancel{(x-1)}}{\underset{3}{\cancel{6}}\,\cancel{(x-1)}}=-\frac{2}{3} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

2. $\dfrac{a^2-b^2}{b^2-a^2}$

<u>Solución</u>:

Para tener factores comunes, en el numerador y denominador, cambiamos el signo del deominador y el signo de la fracción:

$$\frac{a^2-b^2}{b^2-a^2}=-\frac{\left(a^2-b^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)};$$

$$\therefore \quad \frac{a^2-b^2}{b^2-a^2}=-\frac{\cancel{\left(a^2-b^2\right)}}{\cancel{\left(a^2-b^2\right)}}=-1 \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

3. $\dfrac{m^2-n^2}{(n-m)^2}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}=\frac{(m-n)(m+n)}{(n-m)^2} \qquad \{\text{factorizando}\}$$

Para tener factores comunes, en el numerador y denominador, cambiamos el signo del primer factor en el numerador y el signo de la fracción:

$$\frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}=-\frac{(n-m)(m+n)}{(n-m)^2},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}=-\frac{\cancel{(n-m)}(m+n)}{(n-m)^{\cancel{2}}}=-\frac{m+n}{n-m} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}=\frac{m+n}{m-n} \qquad \{\text{eliminando el signo de la fracción y cambiando el de la expresión en el denominador}\}.$$

4. $\dfrac{x^2-x-12}{16-x^2}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{x^2-x-12}{16-x^2}=\frac{(x-4)(x+3)}{(4-x)(4+x)} \qquad \{\text{factorizando}\}$$

Para tener factores comunes, en el numerador y denominador, cambiamos el signo del primer factor en el denominador y el signo de la fracción:

$$\frac{x^2-x-12}{16-x^2}=-\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(4+x)};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-x-12}{16-x^2}=-\frac{\cancel{(x-4)}(x+3)}{\cancel{(x-4)}(4+x)}=-\frac{x+3}{x+4} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

5. $\dfrac{3y-6x}{2mx-my-2nx+ny}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{3y-6x}{2mx-my-2nx+ny}=\frac{-3(2x-y)}{m(2x-y)-n(2x-y)}=\frac{-3(2x-y)}{(2x-y)(m-n)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{3y-6x}{2mx-my-2nx+ny}=\frac{-3\cancel{(2x-y)}}{\cancel{(2x-y)}(m-n)}=\frac{-3}{m-n} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{3y-6x}{2mx-my-2nx+ny}=\frac{3}{n-m} \qquad \{\text{cambiando tanto el signo del numerador como el del denominador}\}.$$

6. $\dfrac{2x^2-9x-5}{10+3x-x^2}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{2x^2-9x-5}{10+3x-x^2}=\frac{2x^2-9x-5}{-(x^2-3x-10)}=\frac{(x-5)(2x+1)}{-(x-5)(x+2)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{2x^2-9x-5}{10+3x-x^2}=\frac{\cancel{(x-5)}(2x+1)}{-\cancel{(x-5)}(x-2)}=\frac{2x+1}{-(x+2)} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{2x^2-9x-5}{10+3x-x^2}=-\frac{2x+1}{x+2}.$$

7. $\dfrac{8-a^3}{a^2+2a-8}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{8-a^3}{a^2+2a-8}=\frac{(2-a)(4+2a+a^2)}{(a+4)(a-2)} \qquad \{\text{factorizando}\}$$

Cambiamos tanto el signo de la fracción como el del primer factor del numerador:

$$\Rightarrow \quad \frac{8-a^3}{a^2+2a-8}=-\frac{(a-2)(4+2a+a^2)}{(a+4)(a-2)};$$

$$\therefore \quad \frac{8-a^3}{a^2+2a-8}=-\frac{\cancel{(a-2)}(4+2a+a^2)}{(a+4)\cancel{(a-2)}}=-\frac{4+2a+a^2}{a+4}=-\frac{a^2+2a+4}{a+4} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

8. $\dfrac{a^2+a-2}{n-an-m+am}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{a^2+a-2}{n-an-m+am}=\frac{(a+2)(a-1)}{n(1-a)-m(1-a)} \qquad \{\text{factorizando}\}$$

Cambiamos tanto el signo de la fracción como el del segundo factor en el numerador:

$$\frac{a^2+a-2}{n-an-m+am}=-\frac{(a+2)(1-a)}{n(1-a)-m(1-a)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2+a-2}{n-an-m+am}=-\frac{(a+2)(1-a)}{(1-a)(n-m)};$$

$$\therefore \quad \frac{a^2+a-2}{n-an-m+am}=-\frac{(a+2)\cancel{(1-a)}}{\cancel{(1-a)}(n-m)}=-\frac{a+2}{n-m} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a^2+a-2}{n-an-m+am}=\frac{a+2}{m-n} \qquad \{\text{cambiando los signos de la fracción y denominador}\}.$$

121

Simplificación de fracciones cuyos términos no pueden factorarse fácilmente

Procedimiento

1. Se ordenan los polinomios
2. Si es posible, se factorizan el numerador y denominador, sacando un factor común
3. Se simpllifica la expresión
4. Se halla el m.c.d. del numerador y denominador por divisiones sucesivas
5. Se divide el numerador y denominador por su m.c.d.
Nota1: todas las divisiones deben continuarse hasta que el primer término del residuo sea de grado inferior al primer término del divisor
Nota2: durante el proceso se puede dividir o multiplicar el dividendo, o el divisor o el residuo por un factor cualquiera.

Simplificar las fracciones siguientes hallando el m.c.d. de los dos términos:

1. $\dfrac{a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3}{a^4 - a^3x - 2a^2x^2 + 2ax^3}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3}{a^4 - a^3x - 2a^2x^2 + 2ax^3} = \frac{a(a^3 - a^2x + ax^2 - x^3)}{a(a^3 - a^2x - 2ax^2 + 2x^3)} \quad \{\text{sacando factor común}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3}{a^4 - a^3x - 2a^2x^2 + 2ax^3} = \frac{a^3 - a^2x + ax^2 - x^3}{a^3 - a^2x - 2ax^2 + 2x^3} \quad \{\text{simplificando}\}$$

Dividimos el numerador por el denominador:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - a^2x + ax^2 - x^3 & a^3 - a^2x - 2ax^2 + 2x^3 \\ \cline{2-2} \underline{-a^3 + a^2x + 2ax^2 - 2x^3} & 1 \\ 3ax^2 - 3x^3 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el residuo por $3x^2$:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - a^2x - 2ax^2 + 2x^3 & a - x \\ \cline{2-2} \underline{-a^3 + a^2x \qquad\qquad\quad} & a^2 - 2x^2 \\ -2ax^2 + 2x^3 & \\ \underline{2ax^2 - 2x^3} & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es $a - x$.

Dividimos el numerador y el denominador por $a - x$:

$$\frac{a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3}{a^4 - a^3x - 2a^2x^2 + 2ax^3} = \frac{\left(a^3 - a^2x + ax^2 - x^3\right) \div (a - x)}{\left(a^3 - a^2x - 2ax^2 + 2x^3\right) \div (a - x)}$$

$$\begin{array}{r|l} a^3 - a^2x + ax^2 - x^3 & a - x \\ \cline{2-2} \underline{-a^3 + a^2x \qquad\qquad} & a^2 + x^2 \\ ax^2 - x^3 & \\ \underline{-ax^2 + x^3} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} a^3 - a^2x - 2ax^2 + 2x^3 & a - x \\ \cline{2-2} \underline{-a^3 + a^2x \qquad\qquad\quad} & a^2 - 2x^2 \\ -2ax^2 + 2x^3 & \\ \underline{2ax^2 - 2x^3} & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3}{a^4 - a^3x - 2a^2x^2 + 2ax^3} = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - 2x^2}.$$

2. $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2-3x-5}{x^4+3x^3+6x^2+3x+5}$

<u>Solución</u>:

Dividimos el numerador por el denominador:

$$\begin{array}{rl} x^4+3x^3+4x^2-3x-5 & \underline{|x^4+3x^3+6x^2+3x+5} \\ \underline{-x^4-3x^3-6x^2-3x-5} & \quad 1 \\ -2x^2-6x-10 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el residuo por -2:

$$\begin{array}{rl} x^4+3x^3+6x^2+3x+5 & \underline{|x^2+3x+5} \\ \underline{-x^4-3x^3-5x^2\qquad\qquad} & x^2-1 \\ x^2+3x+5 & \\ \underline{-x^2-3x-5} & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es x^2+3x+5 .

Dividimos el numerador y el denominador por x^2+3x+5:

$$\frac{x^4+3x^3+4x^2-3x-5}{x^4+3x^3+6x^2+3x+5}=\frac{\left(x^4+3x^3+4x^2-3x-5\right)\div(x^2+3x+5)}{\left(x^4+3x^3+6x^2+3x+5\right)\div(x^2+3x+5)}$$

$$\begin{array}{rl} x^4+3x^3+4x^2-3x-5 & \underline{|x^2+3x+5} \\ \underline{-x^4-3x^3-5x^2\qquad\qquad} & x^2-1 \\ -x^2-3x-5 & \\ \underline{x^2+3x+5} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x^4+3x^3+6x^2+3x+5 & \underline{|x^2+3x+5} \\ \underline{-x^4-3x^3-5x^2\qquad\qquad} & x^2+1 \\ x^2+3x+5 & \\ \underline{-x^2-3x-5} & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^4+3x^3+4x^2-3x-5}{x^4+3x^3+6x^2+3x+5}=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

3. $\dfrac{2ax^4 - ax^3 - ax^2 - 2ax + 2a}{3ax^4 - 4ax^3 + ax^2 + 3ax - 3a}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{2ax^4 - ax^3 - ax^2 - 2ax + 2a}{3ax^4 - 4ax^3 + ax^2 + 3ax - 3a} = \frac{a(2x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 2)}{a(3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x - 3)} \quad \{\text{sacando factor común}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2ax^4 - ax^3 - ax^2 - 2ax + 2a}{3ax^4 - 4ax^3 + ax^2 + 3ax - 3a} = \frac{2x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 2}{3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x - 3} \quad \{\text{simplificando}\}$$

Dividimos el numerador por el denominador (previamente multiplicamos el numerador por 3 y el denominador por 2):

$$\begin{array}{rl}
6x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 6x + 6 & \big|\, \underline{6x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 6x - 6} \\
\underline{-6x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 6x + 6} & \; 1 \\
5x^3 - 5x^2 - 12x + 12 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el residuo

(previamente multiplicamos el divisor por 5 y el residuo por 6):

$$\begin{array}{rl}
30x^4 - 40x^3 + 10x^2 + 30x - 30 & \big|\, \underline{30x^3 - 30x^2 - 72x + 72} \\
\underline{-30x^4 + 30x^3 + 72x^2 - 72x \quad\quad} & \; x - 1/3 \\
-10x^3 + 82x^2 - 42x - 30 & \\
\underline{10x^3 - 10x^2 - 24x + 24} & \\
72x^2 - 66x \quad - 6 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el último residuo

(previamente multiplicamos el divisor por 12 y el residuo por 5):

$$\begin{array}{rl}
360x^3 - 360x^2 - 864x + 864 & \big|\, \underline{360x^2 - 330x - 30} \\
\underline{-360x^3 + 330x^2 \quad + 30x \quad\quad} & \; x - 1/12 \\
-30x^2 - 834x + 864 & \\
\underline{30x^2 - \frac{55}{2}x - \frac{5}{2}} & \\
-\frac{1723}{2}x + \frac{1723}{2} &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el último residuo

(previamente multiplicamos el divisor por $-\dfrac{2}{1723}$ y el residuo lo dividimos por 30):

$$\begin{array}{rl}
12x^2 - 11x - 1 & \big|\, \underline{x - 1} \\
\underline{-12x^2 + 12x \quad\quad} & \; 12x + 1 \\
x - 1 & \\
\underline{-x + 1} &
\end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es $x - 1$.

Dividimos el numerador y el denominador por $x - 1$:

$$\frac{2ax^4 - ax^3 - ax^2 - 2ax + 2a}{3ax^4 - 4ax^3 + ax^2 + 3ax - 3a} = \frac{\left(2x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 2\right) \div (x - 1)}{\left(3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x - 3\right) \div (x - 1)}$$

$$\begin{array}{rl}
2x^4 \quad - x^3 - x^2 - 2x + 2 & \big|\, \underline{x - 1 \quad\quad} \\
\underline{-2x^4 + 2x^3 \quad\quad\quad\quad} & \; 2x^3 + x^2 - 2 \\
x^3 - x^2 - 2x + 2 & \\
\underline{-x^3 + x^2 \quad\quad\quad} & \\
-2x + 2 & \\
\underline{2x - 2} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x - 3 & \big|\, \underline{x - 1 \quad\quad} \\
\underline{-3x^4 + 3x^3 \quad\quad\quad\quad} & \; 3x^3 - x^2 + 3 \\
-x^3 + x^2 + 3x - 3 & \\
\underline{x^3 - x^2 \quad\quad\quad} & \\
3x - 3 & \\
\underline{-3x + 3} &
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{2ax^4 - ax^3 - ax^2 - 2ax + 2a}{3ax^4 - 4ax^3 + ax^2 + 3ax - 3a} = \frac{2x^3 + x^2 - 2}{3x^3 - x^2 + 3}.$$

4. $\dfrac{6x^3-13x^2+18x-8}{10x^3-9x^2+11x+12}$

<u>Solución</u>:

Dividimos el numerador por el denominador (previamente multiplicamos el numerador por 5 y el denominador por 3):

$$\begin{array}{l|l}
30x^3-65x^2+90x-40 & 30x^3-27x^2+33x+36 \\
\underline{-30x^3+27x^2-33x-36} & 1 \\
\quad -38x^2+57x-76 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el residuo

(previamente dividimos el divisor por 3 y el residuo por -19):

$$\begin{array}{l|l}
10x^3-9x^2+11x+12 & 2x^2-3x+4 \\
\underline{-10x^3+15x^2-20x} & 5x+3 \\
\quad 6x^2-9x+12 & \\
\quad \underline{-6x^2+9x-12} &
\end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es $2x^2-3x+4$.

Dividimos el numerador y el denominador por $2x^2-3x+4$:

$$\frac{2ax^4-ax^3-ax^2-2ax+2a}{10x^3-9x^2+11x+12}=\frac{\left(6x^3-13x^2+18x-8\right)\div(2x^2-3x+4)}{\left(10x^3-9x^2+11x+12\right)\div(2x^2-3x+4)}$$

$$\begin{array}{l|l}
6x^3-13x^2+18x-8 & 2x^2-3x+4 \\
\underline{-6x^3+9x^2-12x} & 3x-2 \\
\quad -4x^2+6x-8 & \\
\quad \underline{4x^2-6x+8} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
10x^3-9x^2+11x+12 & 2x^2-3x+4 \\
\underline{-10x^3+15x^2-20x} & 5x+3 \\
\quad 6x^2-9x+12 & \\
\quad \underline{-6x^2+9x-12} &
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{6x^3-13x^2+18x-8}{10x^3-9x^2+11x+12}=\frac{3x-2}{5x+3}.$$

5. $\dfrac{x^4-2x^3y+2x^2y^2-xy^3}{2x^4-5x^3y+4x^2y^2-xy^3}$

<u>Solución</u> :

$$\frac{x^4-2x^3y+2x^2y^2-xy^3}{2x^4-5x^3y+4x^2y^2-xy^3}=\frac{x(x^3-2x^2y+2xy^2-y^3)}{x(2x^3-5x^2y+4xy^2-y^3)}\quad \{\text{sacando factor común}\},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x^4-2x^3y+2x^2y^2-xy^3}{2x^4-5x^3y+4x^2y^2-xy^3}=\frac{x^3-2x^2y+2xy^2-y^3}{2x^3-5x^2y+4xy^2-y^3}\quad \{\text{simplificando}\}$$

Dividimos el denominador por el numerador:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3-5x^2y+4xy^2-y^3 & x^3-2x^2y+2xy^2-y^3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^3+4x^2y-4xy^2+2y^3} & 2 \\
\quad -x^2y+y^3 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el residuo por $-y$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2y+2xy^2-y^3 & x^2-y^2 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3+xy^2} & x-2y \\
\quad -2x^2y+3xy^2-y^3 & \\
\quad \underline{2x^2y-2y^3} & \\
\qquad 3xy^2-3y^3 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el último residuo por $3y^2$:

$$(x^2-y^2)\div(x-y)=x+y$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es $x-y$ (el último divisor).

Dividimos el numerador y el denominador por $x-y$:

$$\frac{x^3-2x^2y+2xy^2-y^3}{2x^3-5x^2y+4xy^2-y^3}=\frac{\left(x^3-2x^2y+2xy^2-y^3\right)\div(x-y)}{\left(2x^3-5x^2y+4xy^2-y^3\right)\div(x-y)}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2y+2xy^2-y^3 & x-y \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3+x^2y} & x^2-xy+y^2 \\
\quad -x^2y+2xy^2 & \\
\quad \underline{x^2y-xy^2} & \\
\qquad xy^2-y^3 & \\
\qquad \underline{-xy^2+y^3} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
2x^3-5x^2y+4xy^2-y^3 & x-y \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^3+2x^2y} & 2x^2-3xy+y^2 \\
\quad -3x^2y+4xy^2 & \\
\quad \underline{3x^2y-3xy^2} & \\
\qquad xy^2-y^3 & \\
\qquad \underline{-xy^2+y^3} &
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^4-2x^3y+2x^2y^2-xy^3}{2x^4-5x^3y+4x^2y^2-xy^3}=\frac{x^2-xy+y^2}{2x^2-3xy+y^2}.$$

6. $\dfrac{2a^5 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 3}{3a^5 - a^4 + 3a^3 + 4a^2 + 5}$

<u>Solución</u>:

Dividimos el denominador por el numerador (previamente multiplicados el numerador por 3 y el denominador por 2):

$$\begin{array}{l|l}
6a^5 - 3a^4 + 6a^3 + 6a^2 + 9 & 6a^5 - 2a^4 + 6a^3 + 8a^2 + 10 \\ \cline{2-2}
\underline{-6a^5 + 2a^4 - 6a^3 - 8a^2 - 10} & 1 \\
\quad -a^4 \qquad -2a^2 - 1 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de multiplicar el residuo por -1:

$$\begin{array}{l|l}
6a^5 - 2a^4 + 6a^3 + 8a^2 \quad + 10 & a^4 + 2a^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-6a^5 \quad - 12a^3 \quad - 6a} & 6a - 2 \\
\quad -2a^4 - 6a^3 + 8a^2 & \\
\quad \underline{2a^4 \quad + 4a^2 \quad + 2} & \\
\qquad -6a^3 + 12a^2 - 6a + 12 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el último residuo por -6:

$$\begin{array}{l|l}
a^4 \quad + 2a^2 \quad + 1 & a^3 - 2a^2 + a - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-a^4 + 2a^3 - a^2 + 2a} & a + 2 \\
\quad 2a^3 + a^2 + 2a & \\
\quad \underline{-2a^3 + 4a^2 - 2a + 4} & \\
\qquad 5a^2 \quad + 5 &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el último residuo por 5:

$$\begin{array}{l|l}
a^3 - 2a^2 + a - 2 & a^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-a^3 \quad - a} & a - 2 \\
\quad -2a^2 \quad -2 & \\
\quad \underline{2a^2 \quad + 2} &
\end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es $a^2 + 1$ (el último divisor).

Dividimos el numerador y el denominador por $a^2 + 1$:

$$\frac{2a^5 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 3}{3a^5 - a^4 + 3a^3 + 4a^2 + 5} = \frac{\left(2a^5 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 3\right) \div \left(a^2 + 1\right)}{\left(3a^5 - a^4 + 3a^3 + 4a^2 + 5\right) \div \left(a^2 + 1\right)}$$

$$\begin{array}{l|l}
2a^5 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 3 & a^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-2a^5 \quad - 2a^3} & 2a^3 - a^2 + 3 \\
\quad -a^4 \quad + 2a^2 & \\
\quad \underline{a^4 \quad + a^2} & \\
\qquad 3a^2 + 3 & \\
\qquad \underline{-3a^2 - 3} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
3a^5 - a^4 + 3a^3 + 4a^2 + 5 & a^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-3a^5 \quad - 3a^3} & 3a^3 - a^2 + 5 \\
\quad -a^4 \quad + 4a^2 & \\
\quad \underline{a^4 \quad + a^2} & \\
\qquad 5a^2 + 5 & \\
\qquad \underline{-5a^2 - 5} &
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{2a^5 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 3}{3a^5 - a^4 + 3a^3 + 4a^2 + 5} = \frac{2a^3 - a^2 + 3}{3a^3 - a^2 + 5}.$$

7. $\dfrac{1-x-x^3+x^4}{1-2x-x^2-2x^3+x^4}$

<u>Solución</u>:

Dividimos el denominador por el numerador (previamente ordenados en forma descendente):

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-2x^3-x^2-2x+1 & x^4-x^3-x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4+x^3\qquad\quad +x-1} & 1 \\
\quad -x^3-x^2\quad -x &
\end{array}
$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el residuo por $-x$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-x^3\qquad -x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4-x^3-x^2\qquad\quad} & x^2-2x+1 \\
\quad -2x^3\quad -x^2\quad -x+1 & \\
\quad \underline{2x^3+2x^2+2x\quad} & \\
\qquad\qquad x^2\quad +x+1 & \\
\qquad\quad \underline{-x^2\quad -x-1} &
\end{array}
$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es x^2+x+1 (el último divisor).

Dividimos el numerador y el denominador por x^2+x+1:

$$\frac{1-x-x^3+x^4}{1-2x-x^2-2x^3+x^4}=\frac{\left(x^4-x^3-x+1\right)\div(x^2+x+1)}{\left(x^4-2x^3-x^2-2x+1\right)\div(x^2+x+1)}$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-x^3\qquad -x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4-x^3-x^2\qquad\quad} & x^2-2x+1 \\
\quad -2x^3\quad -x^2-x & \\
\quad \underline{2x^3+2x^2+2x\quad} & \\
\qquad\qquad x^2\quad +x+1 & \\
\qquad\quad \underline{-x^2\quad -x-1} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^4-2x^3-x^2-2x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4\ -x^3-x^2\qquad\quad} & x^2-3x+1 \\
\quad -3x^3-2x^2-2x & \\
\quad \underline{3x^3+3x^2+3x\quad} & \\
\qquad\qquad x^2+\ x+1 & \\
\qquad\quad \underline{-x^2\quad -x-1} &
\end{array}
$$

Por lo tanto:

$$\frac{1-x-x^3+x^4}{1-2x-x^2-2x^3+x^4}=\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+1}.$$

8. $\dfrac{2m^3+2m^2n-mn^2-n^3}{3m^3+3m^2n+mn+n^2}$

<u>Solución</u>:

Este ejercicio se resuelve factorizando los polinomios:

$$\frac{2m^3+2m^2n-mn^2-n^3}{3m^3+3m^2n+mn+n^2}=\frac{2m^2(m+n)-n^2(m+n)}{3m^2(m+n)+n(m+n)}=\frac{(m+n)(2m^2-n^2)}{(m+n)(3m^2+n)};$$

$$\therefore\qquad \frac{2m^3+2m^2n-mn^2-n^3}{3m^3+3m^2n+mn+n^2}=\frac{2m^2-n^2}{3m^2+n}\qquad\{\text{simplificando}\}.$$

9. $\dfrac{6a^5+3a^4-4a^3-2a^2+10a+5}{3a^6+7a^4-a^2+15}$

<u>Solución</u>:

Dividimos el denominador por el numerador (previamente multiplicando el denominador por 2):

$$
\begin{array}{r|l}
6a^6 \quad +14a^4 \quad -2a^2 \quad +30 & 6a^5+3a^4-4a^3-2a^2+10a+5 \\ \cline{2-2}
\underline{-6a^6-3a^5+4a^4+2a^3-10a^2-5a} & a-1/2 \\
-3a^5+18a^4+2a^3-12a^2-5a+30 & \\
\underline{3a^5+\frac{3}{2}a^4-2a^3 \quad -a^2+5a+\frac{5}{2}} & \\
\frac{39}{2}a^4 \quad -13a^2 \quad +\frac{65}{2} &
\end{array}
$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de multiplicar el residuo por $2/13$:

$$
\begin{array}{r|l}
6a^5+3a^4-4a^3-2a^2+10a+5 & 3a^4-2a^2+5 \\ \cline{2-2}
\underline{-6a^5 \quad +4a^3 \quad -10a} & 2a+1 \\
3a^4 \quad -2a^2 \quad +5 & \\
\underline{-3a^4 \quad 2a^2 \quad -5} &
\end{array}
$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es $3a^4-2a^2+5$ (el último divisor).

Dividimos el numerador y el denominador por $3a^4-2a^2+5$:

$$\frac{6a^5+3a^4-4a^3-2a^2+10a+5}{3a^6+7a^4-a^2+15}=\frac{\left(6a^5+3a^4-4a^3-2a^2+10a+5\right)\div\left(3a^4-2a^2+5\right)}{\left(3a^6+7a^4-a^2+15\right)\div\left(3a^4-2a^2+5\right)}$$

$$
\begin{array}{r|l}
6a^5+3a^4-4a^3-2a^2+10a+5 & 3a^4-2a^2+5 \\ \cline{2-2}
\underline{-6a^5 \quad +4a^3 \quad -10a} & 2a+1 \\
3a^4 \quad -2a^2 \quad +5 & \\
\underline{-3a^4 \quad 2a^2 \quad -5} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3a^6+7a^4-a^2+15 & 3a^4-2a^2+5 \\ \cline{2-2}
\underline{-3a^6+2a^4-5a^2} & a^2+3 \\
9a^4-6a^2+15 & \\
\underline{-9a^4+6a^2-15} &
\end{array}
$$

Por lo tanto:

$$\frac{6a^5+3a^4-4a^3-2a^2+10a+5}{3a^6+7a^4-a^2+15}=\frac{2a+1}{a^2+3}.$$

10. $\dfrac{5x^6-10x^4+21x^3-2x+4}{3x^6-6x^4+11x^3+2x-4}$

<u>Solución</u>:

Dividimos el numerador por el denominador (previamente multiplicando el umerador por 3 y el denominador por 5):

$$\begin{array}{r|l} 15x^6-30x^4+63x^3-6x+12 & 15x^6-30x^4+55x^3+10x-20 \\ \hline \underline{-15x^6+30x^4-55x^3-10x+20} & 1 \\ 8x^3-16x+32 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el residuo por 8 :

$$\begin{array}{r|l} 15x^6-30x^4+55x^3+10x-20 & x^3-2x+4 \\ \hline \underline{-15x^6+30x^4-60x^3} & 15x^3-5 \\ -5x^3+10x-20 & \\ \underline{5x^3+10x-20} & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es x^3-2x+4 (el último divisor).

Dividimos el numerador y el denominador por x^3-2x+4 :

$$\frac{5x^6-10x^4+21x^3-2x+4}{3x^6-6x^4+11x^3+2x-4}=\frac{\left(5x^6-10x^4+21x^3-2x+4\right)\div(x^3-2x+4)}{\left(3x^6-6x^4+11x^3+2x-4\right)\div(x^3-2x+4)}$$

$$\begin{array}{r|l} 5x^6-10x^4+21x^3-2x+4 & x^3-2x+4 \\ \hline \underline{-5x^6+10x^4-20x^3} & 5x^3+1 \\ x^3-2x+4 & \\ \underline{-x^3+2x-4} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3x^6-6x^4+11x^3+2x-4 & x^3-2x+4 \\ \hline \underline{-3x^6+6x^4-12x^3} & 3x^3-1 \\ -x^3+2x-4 & \\ \underline{x^3-2x+4} & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{5x^6-10x^4+21x^3-2x+4}{3x^6-6x^4+11x^3+2x-4}=\frac{5x^3+1}{3x^3-1}.$$

11. $\dfrac{n^6-3n^5-n^4+3n^3+7n^2-21n}{n^6+2n^5-n^4-2n^3+7n^2+14n}$

<u>Solución</u>:

Dividimos el numerador por el denominador:

$$\begin{array}{l|l}
n^6-3n^5-n^4+3n^3+7n^2-21n & n^6+2n^5-n^4-2n^3+7n^2+14n \\ \cline{2-2}
\underline{-n^6-2n^5+n^4+2n^3-7n^2-14n} & 1 \\
\quad -5n^5 \qquad +5n^3 \qquad -35n &
\end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el resultado de dividir el residuo por -5:

$$\begin{array}{l|l}
n^6+2n^5-n^4-2n^3+7n^2+14n & n^5-n^3+7n \\ \cline{2-2}
\underline{-n^6 \qquad +n^4 \qquad -7n^2} & n+2 \\
\qquad 2n^5-2n^3+14n & \\
\qquad \underline{-2n^5+2n^3-14n} &
\end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es n^5-n^3+7n (el último divisor).

Dividimos el numerador y el denominador por n^5-n^3+7n:

$$\frac{n^6-3n^5-n^4+3n^3+7n^2-21n}{n^6+2n^5-n^4-2n^3+7n^2+14n}=\frac{\left(n^6-3n^5-n^4+3n^3+7n^2-21n\right)\div\left(n^5-n^3+7n\right)}{\left(n^6+2n^5-n^4-2n^3+7n^2+14n\right)\div\left(n^5-n^3+7n\right)}$$

$$\begin{array}{l|l}
n^6-3n^5-n^4+3n^3+7n^2-21n & n^5-n^3+7n \\ \cline{2-2}
\underline{-n^6 \qquad +n^4 \qquad -7n^2} & n-3 \\
\quad -3n^5 \qquad +3n^3 \qquad -21n & \\
\quad \underline{3n^5 \qquad -3n^3 \qquad +21n} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
n^6+2n^5-n^4-2n^3+7n^2+14n & n^5-n^3+7n \\ \cline{2-2}
\underline{-n^6 \qquad +n^4 \qquad -7n^2} & n+2 \\
\quad 2n^5 \qquad -2n^3 \qquad +14n & \\
\quad \underline{-2n^5 \qquad +2n^3 \qquad -14n} &
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{n^6-3n^5-n^4+3n^3+7n^2-21n}{n^6+2n^5-n^4-2n^3+7n^2+14n}=\frac{n-3}{n+2}.$$

12. $\dfrac{a^7+2a^6-5a^5+8a^4+a^3+2a^2-5a+8}{a^6+2a^5-5a^4+10a^3+4a^2-10a+16}$

<u>Solución</u>:

Dividimos el numerador por el denominador:

$$\begin{array}{l|l} a^7+2a^6-5a^5+8a^4+a^3+2a^2-5a+8 & a^6+2a^5-5a^4+10a^3+4a^2-10a+16 \\ \underline{-a^7-2a^6+5a^5-10a^4-4a^3+10a^2-16a} & a \\ \qquad -2a^4-3a^3+12a^2-21a+8 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el residuo

(previamente multiplicamos el divisor por 2 y el residuo por -1):

$$\begin{array}{l|l} 2a^6+4a^5-10a^4+20a^3+8a^2-20a+32 & 2a^4+3a^3-12a^2+21a-8 \\ \underline{-2a^6-3a^5+12a^4-21a^3+8a^2} & a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4} \\ \quad a^5+2a^4-a^3+16a^2-20a+32 & \\ \quad \underline{-a^5-\frac{3}{2}a^4+6a^3-\frac{21}{2}a^2+4a} & \\ \qquad \frac{1}{2}a^4+5a^3+\frac{11}{2}a^2-16a+32 & \\ \qquad \underline{-\frac{1}{2}a^4-\frac{3}{4}a^3+3a^2-\frac{21}{4}a+2} & \\ \qquad\quad \frac{17}{4}a^3+\frac{17}{2}a^2-\frac{85}{4}a+34 & \end{array}$$

Como la división no es exacta, dividimos el divisor por el residuo

(previamente multiplicamos el residuo por $4/17$):

$$\begin{array}{l|l} 2a^4+3a^3-12a^2+21a-8 & a^3+2a^2-5a+8 \\ \underline{-2a^4-4a^3+10a^2-16a} & 2a-1 \\ \quad -a^3-2a^2+5a-8 & \\ \quad \underline{a^3+2a^2-5a+8} & \end{array}$$

Como la división es exacta, el m.c.d. es a^3+2a^2-5a+8 (el último divisor).

Dividimos el numerador y el denominador por a^3+2a^2-5a+8:

$$\frac{a^7+2a^6-5a^5+8a^4+a^3+2a^2-5a+8}{a^6+2a^5-5a^4+10a^3+4a^2-10a+16}=\frac{(a^7+2a^6-5a^5+8a^4+a^3+2a^2-5a+8)\div(a^3+2a^2-5a+8)}{(a^6+2a^5-5a^4+10a^3+4a^2-10a+16)\div(a^3+2a^2-5a+8)}$$

$$\begin{array}{l|l} a^7+2a^6-5a^5+8a^4+a^3+2a^2-5a+8 & a^3+2a^2-5a+8 \\ \underline{-a^7-2a^6+5a^5-8a^4} & a^4+1 \\ \qquad a^3+2a^2-5a+8 & \\ \qquad \underline{-a^3-2a^2+5a-8} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a^6+2a^5-5a^4+10a^3+4a^2-10a+16 & a^3+2a^2-5a+8 \\ \underline{-a^6-2a^5+5a^4-8a^3} & a^3+2 \\ \qquad 2a^3+4a^2-10a+16 & \\ \qquad \underline{-2a^3-4a^2+10a-16} & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{a^7+2a^6-5a^5+8a^4+a^3+2a^2-5a+8}{a^6+2a^5-5a^4+10a^3+4a^2-10a+16}=\frac{a^4+1}{a^3+2}.$$

Reducción de fracciones

Reducir una fracción a términos mayores

Procedimiento
1. Se divide el numerador o denominador dado en el miembro derecho de la ecuación, por el numerador o denominador, según corresponda, dado en el miembro izquierdo **2.** El cociente hallado en el paso anterior se multiplica por el denominador o numerador dado en el miembro izquierdo de la ecuación **3.** El producto hallado en el paso anterior se escribe en el espacio en blanco

C o m p l e t a r :

1. $\dfrac{3}{2a} = \dfrac{\quad}{4a^2}$

Solución:

$4a^2 \div 2a = 2a$

$2a \times 3 = 6a;$

$\therefore \quad \dfrac{3}{2a} = \dfrac{6a}{4a^2}$

2. $\dfrac{5}{9x^2} = \dfrac{20a}{\quad}$

Solución:

$20a \div 5 = 4a$

$4a \times 9x^2 = 36ax^2;$

$\therefore \quad \dfrac{5}{9x^2} = \dfrac{20a}{36ax^2}$

3. $\dfrac{m}{ab^2} = \dfrac{\quad}{2a^2b^2}$

Solución:

$2a^2b^2 \div ab^2 = 2a$

$2a \times m = 2am;$

$\therefore \quad \dfrac{m}{ab^2} = \dfrac{2am}{2a^2b^2}$

4. $\dfrac{3x}{8y} = \dfrac{9x^2y^2}{\quad}$

Solución:

$9x^2y^2 \div 3x = 3xy^2$

$3xy^2 \times 8y = 24xy^3;$

$\therefore \quad \dfrac{3x}{8y} = \dfrac{9x^2y^2}{24xy^3}$

19. $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x^2-1}{\quad}$

Solución:

$(x^2-1) \div (x-1) \Leftrightarrow (x+1)(x-1) \div (x-1) = x+1$

$(x+1) \times (x+1) = x^2 + 2x + 1;$

$\therefore \quad \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

20. $\dfrac{a-b}{7a^2} = \dfrac{\quad}{63a^3b}$

Solución:

$63a^3b \div 7a^2 = 9ab$

$9ab \times (a-b) = 9a^2b - 9ab^2;$

$\therefore \quad \dfrac{a-b}{7a^2} = \dfrac{9a^2b-9ab^2}{63a^3b}$

21. $\dfrac{x+1}{x+5} = \dfrac{\quad}{x^2+3x-10}$

Solución:

$(x^2+3x-10) \div (x+5) \Leftrightarrow (x+5)(x-2) \div (x+5) = x-2$

$(x-2) \times (x+1) = x^2 - x - 2;$

$\therefore \quad \dfrac{x+1}{x+5} = \dfrac{x^2-x-2}{x^2+3x-10}$

123

Reducción de fracciones

Reducir una fracción a expresión entera o mixta

Procedimiento

1. Se efectúa la división indicada
2. Si la división es exacta el cociente será un polinomio entero
3. Si la división no es exacta el resultado será una expresión mixta; donde la parte entera es el cociente y la parte fraccionaria tendrá como numerador el residuo y como denominador el divisor

Reducir a expresión entera o mixta:

1. $\dfrac{6a^3-10a^2}{2a}$

Solución:

$$\begin{array}{rl} 6a^3-10a^2 & \lfloor 2a \\ \underline{-6a^3\qquad\quad} & 3a^2-5a \\ -10a^2 & \\ \underline{10a^2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{6a^3-10a^2}{2a}=3a^2-5a.$$

2. $\dfrac{9x^3y-6x^2y^2+3xy^3}{3xy}$

Solución:

$$\begin{array}{rl} 9x^3y-6x^2y^2+3xy^3 & \lfloor 3xy \\ \underline{-9x^3y\qquad\qquad\qquad} & 3x^2-2xy+y^2 \\ -6x^2y^2 \qquad & \\ \underline{6x^2y^2\qquad\quad} & \\ 3xy^3 & \\ \underline{-3xy^3} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{9x^3y-6x^2y^2+3xy^3}{3xy}=3x^2-2xy+y^2.$$

3. $\dfrac{x^2+3}{x}$

Solución:

$$\begin{array}{rl} x^2+3 & \lfloor x \\ \underline{-x^2\qquad} & x \\ 3 & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+3}{x}=x+\frac{3}{x}.$$

4. $\dfrac{10a^2+15a-2}{5a}$

Solución:

$$\begin{array}{rl} 10a^2+15a-2 & \lfloor 5a \\ \underline{-10a^2\qquad\qquad} & 2a+3 \\ 15a\quad & \\ \underline{-15a\quad} & \\ -2 & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{10a^2+15a-2}{5a}=2a+3-\frac{2}{5a}.$$

14. $\dfrac{10n^3-18n^2-5n+3}{2n^2-3n+1}$

Solución:

$$\begin{array}{rrrr|l} 10n^3 & -18n^2 & -5n & +3 & 2n^2-3n+1 \\ \cline{5-5} -10n^3 & +15n^2 & -5n & & 5n \\ \cline{1-4} & -3n^2 & -10n & +3 & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{10n^3-18n^2-5n+3}{2n^2-3n+1} = 5n + \frac{-3n^2-10n+3}{2n^2-3n+1} = 5n - \frac{3n^2+10n-3}{2n^2-3n+1}.$$

15. $\dfrac{8x^4}{4x^2+5x+6}$

Solución:

$$\begin{array}{rrr|l} 8x^4 & & & 4x^2+5x+6 \\ \cline{4-4} -8x^4 & -10x^3 & -12x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-3} & -10x^3 & -12x^2 & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{8x^4}{4x^2+5x+6} = 2x^2 + \frac{-10x^3-12x^2}{4x^2+5x+6} = 2x^2 - \frac{10x^3+12x^2}{4x^2+5x+6}.$$

16. $\dfrac{6m^5+3m^4n}{3m^3-mn^2+n^3}$

Solución:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6m^5 & +3m^4n & & & & 3m^3-mn^2+n^3 \\ \cline{6-6} -6m^5 & & +2m^3n^2 & -2m^2n^3 & & 2m^2+mn \\ \cline{1-4} & 3m^4n & +2m^3n^2 & -2m^2n^3 & & \\ & -3m^4n & & +m^2n^3 & -mn^4 & \\ \cline{2-5} & & 2m^3n^2 & -m^2n^3 & -mn^4 & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{6m^5+3m^4n}{3m^3-mn^2+n^3} = 2m^2+mn+\frac{2m^3n^2-m^2n^3-mn^4}{3m^3-mn^2+n^3}.$$

Reducción de fracciones

Reducir una expresión mixta a fraccionaria

Procedimiento

1. Para hallar el numerador: se multiplica la parte entera por el denominador y a este producto se le suma o resta, según que el signo de la fracción sea positivo o negativo, el numerador de la fracción
2. El denominador del resultado será el mismo denominador de la fracción
3. Se simplifica

Reducir a fracción:

1. $a + \frac{4a}{a+2}$

Solución:

$$a + \frac{4a}{a+2} = \frac{a(a+2)+4a}{a+2} = \frac{a^2+2a+4a}{a+2};$$

$$\therefore \quad a + \frac{4a}{a+2} = \frac{a^2+6a}{a+2}.$$

2. $m - n - \frac{n^2}{m}$

Solución:

$$m - n - \frac{n^2}{m} = \frac{(m-n)m-n^2}{m};$$

$$\therefore \quad m - n - \frac{n^2}{m} = \frac{m^2-mn-n^2}{m}.$$

3. $x + 5 - \frac{3}{x-2}$

Solución:

$$x + 5 - \frac{3}{x-2} = \frac{(x+5)(x-2)-3}{x-2} = \frac{x^2+3x-10-3}{x-2};$$

$$\therefore \quad x + 5 - \frac{3}{x-2} = \frac{x^2+3x-13}{x-2}.$$

4. $a + \frac{ab}{a+b}$

Solución:

$$a + \frac{ab}{a+b} = \frac{a(a+b)+ab}{a+b} = \frac{a^2+ab+ab}{a+b};$$

$$\therefore \quad a + \frac{ab}{a+b} = \frac{a^2+2ab}{a+b}.$$

19. $x-3-\dfrac{x^3-27}{x^2-6x+9}$

Solución:

$$x-3-\frac{x^3-27}{x^2-6x+9}=\frac{(x-3)(x^2-6x+9)-(x^3-27)}{x^2-6x+9}=\frac{x^3-6x^2+9x-3x^2+18x-27-x^3+27}{x^2-6x+9};$$

$$\therefore\quad x-3-\frac{x^3-27}{x^2-6x+9}=\frac{-9x^2+27x}{x^2-6x+9}=\frac{-9x(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{-9x}{(x-3)}=\frac{9x}{3-x}.$$

20. $a^2-3a+5+\dfrac{2a^3-11a+9}{a^2+a-2}$

Solución:

$$a^2-3a+5+\frac{2a^3-11a+9}{a^2+a-2}=\frac{(a^2-3a+5)(a^2+a-2)+(2a^3-11a+9)}{a^2+a-2},$$

$$\Rightarrow\quad a^2-3a+5+\frac{2a^3-11a+9}{a^2+a-2}=\frac{a^4+a^3-2a^2-3a^3-3a^2+6a+5a^2+5a-10+2a^3-11a+9}{a^2+a-2},$$

$$\Rightarrow\quad a^2-3a+5+\frac{2a^3-11a+9}{a^2+a-2}=\frac{a^4-1}{a^2+a-2}=\frac{(a+1)(a-1)(a^2+1)}{(a+2)(a-1)}=\frac{(a+1)(a^2+1)}{(a+2)};$$

$$\therefore\quad a^2-3a+5+\frac{2a^3-11a+9}{a^2+a-2}=\frac{a^3+a^2+a+1}{a+2}.$$

125

Reducción de fracciones

Reducción de fracciones al mínimo común denominador

Procedimiento

1. Se factorizan los denominadores
2. Se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores; éste será el denominador común de las fracciones
3. Para hallar los numeradores, se divide el M.C.D. entre cada denominador, y el cociente se multiplica por el numerador respectivo

Reducir al mínimo común denominador:

1. $\frac{a}{b}, \frac{1}{ab}$

Solución:

El M.C.D. es ab

$$\frac{a}{b}: \; ab \div b = a \quad y \quad a \times a = a^2$$

Las fracciones reducidas a su mínimo común denominador, quedan:

$$\frac{a^2}{ab}, \; \frac{1}{ab}.$$

2. $\frac{x}{2a}, \frac{4}{3a^2x}$

Solución:

El M.C.D. es $6a^2x$

$$\frac{x}{2a}: \; 6a^2x \div 2a = 3ax \quad y \quad 3ax \times x = 3ax^2$$

$$\frac{4}{3a^2x}: \; 6a^2x \div 3a^2x = 2 \quad y \quad 2 \times 4 = 8$$

Las fracciones reducidas a su mínimo común denominador, quedan:

$$\frac{3ax^2}{6a^2x}, \; \frac{8}{6a^2x}.$$

3. $\frac{1}{2x^2}, \frac{3}{4x}, \frac{5}{8x^3}$

Solución:

El M.C.D. es $8x^3$

$$\frac{1}{2x^2}: \; 8x^3 \div 2x^2 = 4x \quad y \quad 4x \times 1 = 4x$$

$$\frac{3}{4x}: \; 8x^3 \div 4x = 2x^2 \quad y \quad 2x^2 \times 3 = 6x^2$$

Las fracciones reducidas a su mínimo común denominador, quedan:

$$\frac{4x}{8x^3}, \; \frac{6x^2}{8x^3}, \; \frac{5}{8x^3}.$$

4. $\frac{3x}{ab^2}, \frac{x}{a^2b}, \frac{3}{a^3}$

Solución:

El M.C.D. es a^3b^2

$$\frac{3x}{ab^2}: \; a^3b^2 \div ab^2 = a^2 \quad \text{y} \quad a^2 \times 3x = 3a^2x$$

$$\frac{x}{a^2b}: \; a^3b^2 \div a^2b = ab \quad \text{y} \quad ab \times x = abx$$

$$\frac{3}{a^3}: \; a^3b^2 \div a^3 = b^2 \quad \text{y} \quad b^2 \times 3 = 3b^2$$

Las fracciones reducidas a su mínimo común denominador, quedan:

$$\frac{3a^2x}{a^3b^2}, \frac{abx}{a^3b^2}, \frac{3b^2}{a^3b^2}.$$

126

Operaciones con fracciones

Suma de fracciones

P r o c e d i m i e n t o

Para sumar fracciones se procede de la siguiente manera:

1. Se simplifican las fracciones
2. Se halla el mínimo común denominador (m.c.d.)
3. Se divide el m.c.d. por cada denominador, y el cociente obtenido se multiplica por el numerador respectivo
4. Se expresa la suma de los productos obtenidos en el paso anterior en un sólo numerador
5. El denominador de la fracción resultante es el m.c.d.
6. Se reducen los términos semejantes en el numerador
7. Se simplifica

Simplificar:

1. $\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{3x+2}{6}$

Solución - Juan Beltrán:

El m.c.d. es 12

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$12 \div 4 = 3 \quad \text{y} \quad 3(x-2) = 3x-6$$

$$12 \div 6 = 2 \quad \text{y} \quad 2(3x+2) = 6x+4$$

De tal manera que:

$$\frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}=\frac{3x-6+6x+4}{12};$$

$$\therefore \quad \frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}=\frac{9x-2}{12} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

2. $\dfrac{2}{5a^2}+\dfrac{1}{3ab}$

Solución - Juan Beltrán:

El m.c.d. es $15a^2b$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$15a^2b \div 5a^2 = 3b \quad \text{y} \quad 3b(2) = 6b$$

$$15a^2b \div 3ab = 5a \quad \text{y} \quad 5a(1) = 5a$$

De tal manera que:

$$\frac{2}{5a^2}+\frac{1}{3ab}=\frac{6b+5a}{15a^2b}=\frac{5a+6b}{15a^2b} \qquad \{\text{ordenando}\}.$$

3. $\dfrac{a-2b}{15a}+\dfrac{b-a}{20b}$

Solución - Juan Beltrán:

El m.c.d. es $60ab$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$60ab \div 15a = 4b \quad \text{y} \quad 4b(a-2b) = 4ab-8b^2$$

$$60ab \div 20b = 3a \quad \text{y} \quad 3a(b-a) = 3ab-3a^2$$

De tal manera que:

$$\frac{a-2b}{15a}+\frac{b-a}{20b}=\frac{4ab-8b^2+3ab-3a^2}{60ab};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a-2b}{15a}+\frac{b-a}{20b}=\frac{-3a^2+7ab-8b^2}{60ab} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

4. $\dfrac{a+3b}{3ab}+\dfrac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}$

Solución - Juan Beltrán:

El m.c.d. es $15a^2b^2$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$15a^2b^2 \div 3ab = 5ab$ y $5ab(a+3b) = 5a^2b + 15ab^2$

$15a^2b^2 \div 5a^2b^2 = 3$ y $3(a^2b-4ab^2) = 3a^2b - 12ab^2$

De tal manera que:

$$\frac{a+3b}{3ab}+\frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}=\frac{5a^2b+15ab^2+3a^2b-12ab^2}{15a^2b^2},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+3b}{3ab}+\frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}=\frac{8a^2b+3ab^2}{15a^2b^2}=\frac{ab(8a+3b)}{15a^2b^2} \qquad \{\text{reduciendo y factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a+3b}{3ab}+\frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}=\frac{8a+3b}{15ab} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

5. $\dfrac{a-1}{3}+\dfrac{2a}{6}+\dfrac{3a+4}{12}$

Solución - Juan Beltrán:

El m.c.d. es 12

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$12 \div 3 = 4$ y $4(a-1) = 4a-4$

$12 \div 6 = 2$ y $2(2a) = 4a$

Como el denominador de la última fracción es el mismo m.c.d., el numerador no se modifica

De tal manera que:

$$\frac{a-1}{3}+\frac{2a}{6}+\frac{3a+4}{12}=\frac{4a-4+4a+3a+4}{12};$$

$$\therefore \quad \frac{a-1}{3}+\frac{2a}{6}+\frac{3a+4}{12}=\frac{11a}{12} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

6. $\dfrac{n}{m^2}+\dfrac{3}{mn}+\dfrac{2}{m}$

Solución - Juan Beltrán:

El m.c.d. es m^2n

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$m^2n \div m^2 = n$ y $n(n) = n^2$

$m^2n \div mn = m$ y $m(3) = 3m$

$m^2n \div m = mn$ y $mn(2) = 2mn$

De tal manera que:

$$\frac{n}{m^2}+\frac{3}{mn}+\frac{2}{m}=\frac{n^2+3m+2mn}{m^2n}.$$

9. $\frac{3}{5}+\frac{x+2}{2x}+\frac{x^2+2}{6x^2}$

Solución - Juan Beltrán:

El m.c.d. es $30x^2$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$30x^2 \div 5 = 6x^2 \quad y \quad 3\times 6x^2 = 18x^2$$

$$30x^2 \div 2x = 15x \quad y \quad (x+2)\times 15x = 15x^2 + 30x$$

$$30x^2 \div 6x^2 = 5 \quad y \quad (x^2+2)\times 5 = 5x^2 + 10$$

De tal manera que:

$$\frac{3}{5}+\frac{x+2}{2x}+\frac{x^2+2}{6x^2}=\frac{18x^2+15x^2+30x+5x^2+10}{30x^2}=\frac{38x^2+30x+10}{30x^2}=\frac{2\left(19x^2+15x+5\right)}{30x^2};$$

$$\therefore \quad \frac{3}{5}+\frac{x+2}{2x}+\frac{x^2+2}{6x^2}=\frac{19x^2+15x+5}{15x^2}.$$

12. $\frac{x+2}{3x}+\frac{x^2-2}{5x^2}+\frac{2-x^3}{9x^3}$

Solución - Juan Beltrán:

El m.c.d. es $45x^3$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$45x^3 \div 3x = 15x^2 \quad y \quad 15x^2(x+2) = 15x^3 + 30x^2$$

$$45x^3 \div 5x^2 = 9x \quad y \quad 9x\left(x^2-2\right) = 9x^3 - 18x$$

$$45x^3 \div 9x^3 = 5 \quad y \quad 5\left(2-x^3\right) = 10 - 5x^3$$

De tal manera que:

$$\frac{x+2}{3x}+\frac{x^2-2}{5x^2}+\frac{2-x^3}{9x^3}=\frac{15x^3+30x^2+9x^3-18x+10-5x^3}{45x^3}=\frac{19x^3+30x^2-18x+10}{45x^3}.$$

127

Suma de fracciones

Suma de fracciones con denominadores compuestos

Procedimiento

1. Se factorizan los denominadores
2. Se halla el m.c.d. (mínimo común múltilplo de los denomonadores)
3. Se divide el m.c.d. por cada denominador, y el resultado se multiplica por el numerador respectivo
4. La suma será una fracción cuyo numerador estará compuesto por la suma de los productos obtenidos en el paso anterior, y cuyo denominador es el m.c.d.
5. Se efectúan los productos indicados
6. Se reducen términos semejantes

Simplificar:

1. $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}$

Solución:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}=\frac{(a-1)+(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)}=\frac{2a}{(a+1)(a-1)};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}=\frac{2a}{a^2-1}.$$

2. $\frac{2}{x+4}+\frac{1}{x-3}$

Solución:

$$\frac{2}{x+4}+\frac{1}{x-3}=\frac{2(x-3)+(x+4)}{(x+4)(x-3)}=\frac{2x-6+x+4}{(x+4)(x-3)}=\frac{3x-2}{(x+4)(x-3)};$$

$$\therefore \quad \frac{2}{x+4}+\frac{1}{x-3}=\frac{3x-2}{(x+4)(x-3)}.$$

3. $\frac{3}{1-x}+\frac{6}{2x+5}$

Solución:

$$\frac{3}{1-x}+\frac{6}{2x+5}=\frac{3(2x+5)+6(1-x)}{(1-x)(2x+5)}=\frac{6x+15+6-6x}{(1-x)(2x+5)}=\frac{21}{(1-x)(2x+5)};$$

$$\therefore \quad \frac{3}{1-x}+\frac{6}{2x+5}=\frac{21}{(1-x)(2x+5)}.$$

Operaciones con fracciones

Resta de fracciones

P r o c e d i m i e n t o

Para restar fracciones se procede de la siguiente manera:

1. Se simplifican las fracciones
2. Se halla el mínimo común denominador (m.c.d.)
3. Se divide el m.c.d. por cada denominador, y el cociente obtenido se multiplica por el numerador respectivo
4. Se cambia de signo a los productos obtenidos en el paso anterior para la segunda y tercera farcciones y se suman al producto obtenido para la primera fracción
5. El m.c.d. es el denominador de la fracción resultante.
6. Se reducen los términos semejantes en el numerador
7. Se simplifica

Simplificar:

1. $\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x+2}{8}$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es 8

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$8 \div 4 = 2$ y $2(x-3) = 2x-6$: minuendo

$x+2$: sustraendo

De tal manera que:

$$\frac{x-3}{4}-\frac{x+2}{8}=\frac{2x-6-(x+2)}{8}=\frac{2x-6-x-2}{8};$$

$$\therefore \quad \frac{x-3}{4}-\frac{x+2}{8}=\frac{x-8}{8} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

2. $\dfrac{a+5b}{a^2}-\dfrac{b-3}{ab}$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es a^2b

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$a^2b \div a^2 = b$ y $b(a+5b) = ab+5b^2$: minuendo

$a^2b \div ab = a$ y $a(b-3) = ab-3a$: sustraendo

De tal manera que:

$$\frac{a+5b}{a^2}-\frac{b-3}{ab}=\frac{ab+5b^2-(ab-3a)}{a^2b}=\frac{ab+5b^2-ab+3a}{a^2b};$$

$$\therefore \quad \frac{a+5b}{a^2}-\frac{b-3}{ab}=\frac{3a+5b^2}{a^2b} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

9. $\dfrac{3}{5x}-\dfrac{x-1}{3x^2}-\dfrac{x^2+2x+3}{15x^3}$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es $15x^3$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$15x^3 \div 5x = 3x^2$ y $3x^2(3) = 9x^2$: minuendo

$15x^3 \div 3x^2 = 5x$ y $5x(x-1) = 5x^2 - 5x$: sustraendo

x^2+2x+3 : sustraendo

De tal manera que:

$$\frac{3}{5x}-\frac{x-1}{3x^2}-\frac{x^2+2x+3}{15x^3}=\frac{9x^2-(5x^2-5x)-(x^2+2x+3)}{15x^3}=\frac{9x^2-5x^2+5x-x^2-2x-3}{15x^3}=\frac{3x^2+3x-3}{15x^3};$$

$$\therefore\quad \frac{3}{5x}-\frac{x-1}{3x^2}-\frac{x^2+2x+3}{15x^3}=\frac{x^2+x-1}{5x^3}\qquad \{\text{simplificando}\}.$$

10. $\dfrac{1}{2a}-\dfrac{2+b}{3ab}-\dfrac{5}{6a^2b^3}$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es $6a^2b^3$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador y, el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$6a^2b^3 \div 2a = 3ab^3$ y $3ab^3(1) = 3ab^3$: minuendo

$6a^2b^3 \div 3ab = 2ab^2$ y $2ab^2(2+b) = 4ab^2 + 2ab^3$: sustraendo

5 : sustraendo

De tal manera que:

$$\frac{1}{2a}-\frac{2+b}{3ab}-\frac{5}{6a^2b^3}=\frac{3ab^3-(4ab^2+2ab^3)-5}{6a^2b^3}=\frac{3ab^3-4ab^2-2ab^3-5}{6a^2b^3};$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2a}-\frac{2+b}{3ab}-\frac{5}{6a^2b^3}=\frac{ab^3-4ab^2-5}{6a^2b^3}\qquad \{\text{simplificando}\}.$$

P r o c e d i m i e n t o

Para restar fracciones se procede de la siguiente manera:

1. Se simplifican las fracciones
2. Se halla el mínimo común denominador (m.c.d.)
3. Se divide el m.c.d. por cada denominador, y el cociente obtenido se multiplica por el numerador respectivo
4. Se cambia de signo a los productos obtenidos en el paso anterior para la segunda y tercera farcciones y se suman al producto obtenido para la primera fracción
5. El m.c.d. es el denominador de la fracción resultante.
6. Se reducen los términos semejantes en el numerador
7. Se simplifica

1. De $\dfrac{1}{x-4}$ restar $\dfrac{1}{x-3}$

Solución:

$\dfrac{1}{x-4}$: minuendo

$\dfrac{1}{x-3}$: sustraendo

De tal manera que:

$$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}=\frac{x-3-(x-4)}{(x-4)(x-3)}=\frac{x-3-x+4}{(x-4)(x-3)};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{(x-4)(x-3)} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

2. De $\dfrac{m-n}{m+n}$ restar $\dfrac{m+n}{m-n}$

Solución:

$\dfrac{m-n}{m+n}$: minuendo

$\dfrac{m+n}{m-n}$: sustraendo

De tal manera que:

$$\frac{m-n}{m+n}-\frac{m+n}{m-n}=\frac{(m-n)^2-(m+n)^2}{(m+n)(m-n)}=\frac{m^2-2mn+n^2-(m^2+2mn+n^2)}{(m+n)(m-n)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-n}{m+n}-\frac{m+n}{m-n}=\frac{m^2-2mn+n^2-m^2-2mn-n^2}{(m+n)(m-n)};$$

$$\therefore \quad \frac{m-n}{m+n}-\frac{m+n}{m-n}=\frac{-4mn}{(m+n)(m-n)}=-\frac{4mn}{m^2-n^2}=\frac{4mn}{n^2-m^2} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

6. Restar $\dfrac{1}{x-x^2}$ de $\dfrac{1}{x+x^2}$

Solución:

$$\frac{1}{x+x^2}:\ \text{minuendo}$$

$$\frac{1}{x-x^2}:\ \text{sustraendo}$$

De tal manera que:

$$\frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{x-x^2}=\frac{x-x^2-(x+x^2)}{(x+x^2)(x-x^2)}=\frac{x-x^2-x-x^2}{x^2-x^4};$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{x-x^2}=\frac{-2x^2}{x^2-x^4}=\frac{2x^2}{x^4-x^2}=\frac{2x^2}{x^2(x^2-1)}=\frac{2}{x^2-1}.$$

7. Restar $\dfrac{x}{a^2-x^2}$ de $\dfrac{a+x}{(a-x)^2}$

Solución:

$$\frac{a+x}{(a-x)^2}:\ \text{minuendo}$$

$$\frac{x}{a^2-x^2}=\frac{x}{(a-x)(a+x)}:\ \text{sustraendo}$$

El m.c.d. es $(a+x)(a-x)^2$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$(a+x)(a-x)^2\div(a-x)^2=a+x\quad \text{y}\quad (a+x)(a+x)=a^2+2ax+x^2$$

$$(a+x)(a-x)^2\div(a^2-x^2)=a-x\quad \text{y}\quad (a-x)(x)=ax-x^2$$

De tal manera que:

$$\frac{a+x}{(a-x)^2}-\frac{x}{a^2-x^2}=\frac{a^2+2ax+x^2-(ax-x^2)}{(a+x)(a-x)^2}=\frac{a^2+2ax+x^2-ax+x^2}{(a+x)(a-x)^2};$$

$$\therefore\quad \frac{a+x}{(a-x)^2}-\frac{x}{a^2-x^2}=\frac{a^2+ax+2x^2}{(a+x)(a-x)^2}.$$

Simplificar:

11. $\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow\frac{x}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x-1)^2}$$

El m.c.d. es $(x+1)(x-1)^2$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$(x+1)(x-1)^2\div(x+1)(x-1)=x-1 \quad \text{y} \quad (x-1)(x)=x^2-x$$

$$(x+1)(x-1)^2\div(x-1)^2=x+1 \quad \text{y} \quad (x+1)(x+1)=x^2+2x+1$$

De tal manera que:

$$\frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-x-(x^2+2x+1)}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{x^2-x-x^2-2x-1}{(x+1)(x-1)^2};$$

$$\therefore \quad \frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{(x-1)^2}=\frac{-3x-1}{(x+1)(x-1)^2}=-\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)^2}.$$

12. $\dfrac{1}{a^3-b^3}-\dfrac{1}{(a-b)^3}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{1}{a^3-b^3}-\frac{1}{(a-b)^3}\Leftrightarrow\frac{1}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}-\frac{1}{(a-b)^3}$$

El m.c.d. es $(a-b)^3(a^2+ab+b^2)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$(a-b)^3(a^2+ab+b^2)\div(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a-b)^3(a^2+ab+b^2)\div(a-b)^3=a^2+ab+b^2$$

De tal manera que:

$$\frac{1}{a^3-b^3}-\frac{1}{(a-b)^3}=\frac{a^2-2ab+b^2-(a^2+ab+b^2)}{(a-b)^3(a^2+ab+b^2)}=\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-ab-b^2}{(a-b)^3(a^2+ab+b^2)};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^3-b^3}-\frac{1}{(a-b)^3}=\frac{-3ab}{(a-b)^3(a^2+ab+b^2)} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

14. $\dfrac{x-1}{4x+4}-\dfrac{x+2}{8x-8}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{x-1}{4x+4}-\frac{x+2}{8x-8} \Leftrightarrow \frac{x-1}{4(x+1)}-\frac{x+2}{8(x-1)} \qquad \{\text{factorizando los denominadores}\}$$

El m.c.d. es $8(x+1)(x-1)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$8(x+1)(x-1) \div 4(x+1) = 2(x-1) \quad \text{y} \quad 2(x-1)(x-1) = 2x^2 - 4x + 2$$

$$8(x+1)(x-1) \div 8(x-1) = x+1 \quad \text{y} \quad (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$$

De tal manera que:

$$\frac{x-1}{4x+4}-\frac{x+2}{8x-8}=\frac{2x^2-4x+2-(x^2+3x+2)}{8(x+1)(x-1)}=\frac{2x^2-4x+2-x^2-3x-2}{8(x+1)(x-1)};$$

$$\therefore \quad \frac{x-1}{4x+4}-\frac{x+2}{8x-8}=\frac{x^2-7x}{8(x+1)(x-1)}.$$

28. $\frac{1}{4a-12x}-\frac{a^2+9x^2}{a^3-27x^3}-\frac{a}{2(a^2+3ax+9x^2)}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{1}{4a-12x}-\frac{a^2+9x^2}{a^3-27x^3}-\frac{a}{2(a^2+3ax+9x^2)}\Leftrightarrow\frac{1}{4(a-3x)}-\frac{a^2+9x^2}{(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)}-\frac{a}{2(a^2+3ax+9x^2)}$$

El m.c.d. es $4(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$4(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)\div 4(a-3x)=a^2+3ax+9x^2$: minuendo

$4(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)\div(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)=4$ y $4(a^2+9x^2)=4a^2+36x^2$: sustraendo

$4(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)\div 2(a^2+3ax+9x^2)=2(a-3x)=2a-6x$ y $(2a-6x)(a)=2a^2-6ax$: sustraendo

De tal manera que:

$$\frac{1}{4a-12x}-\frac{a^2+9x^2}{a^3-27x^3}-\frac{a}{2(a^2+3ax+9x^2)}=\frac{a^2+3ax+9x^2-(4a^2+36x^2)-(2a^2-6ax)}{4(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)},$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{4a-12x}-\frac{a^2+9x^2}{a^3-27x^3}-\frac{a}{2(a^2+3ax+9x^2)}=\frac{a^2+3ax+9x^2-4a^2-36x^2-2a^2+6ax}{4(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)},$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{4a-12x}-\frac{a^2+9x^2}{a^3-27x^3}-\frac{a}{2(a^2+3ax+9x^2)}=\frac{-5a^2+9ax-27x^2}{4(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)};$$

$$\therefore\quad\frac{1}{4a-12x}-\frac{a^2+9x^2}{a^3-27x^3}-\frac{a}{2(a^2+3ax+9x^2)}=-\frac{5a^2-9ax+27x^2}{4(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)}.$$

29. $\frac{2a^2-3}{10a+10}-\frac{a+1}{50}-\frac{9a^2-14}{50a+50}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{2a^2-3}{10a+10}-\frac{a+1}{50}-\frac{9a^2-14}{50a+50}\Leftrightarrow\frac{2a^2-3}{10(a+1)}-\frac{a+1}{50}-\frac{9a^2-14}{50(a+1)}$$

El m.c.d. es $50(a+1)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$50(a+1)\div 10(a+1)=5$ y $5(2a^2-3)=10a^2-15$: minuendo

$50(a+1)\div 50=(a+1)$ y $(a+1)(a+1)=a^2+2a+1$: sustraendo

$9a^2-14$: sustraendo

De tal manera que:

$$\frac{2a^2-3}{10a+10}-\frac{a+1}{50}-\frac{9a^2-14}{50a+50}=\frac{10a^2-15-(a^2+2a+1)-(9a^2-14)}{50(a+1)},$$

$$\Rightarrow\quad\frac{2a^2-3}{10a+10}-\frac{a+1}{50}-\frac{9a^2-14}{50a+50}=\frac{10a^2-15-a^2-2a-1-9a^2+14}{50(a+1)};$$

$$\therefore\quad\frac{2a^2-3}{10a+10}-\frac{a+1}{50}-\frac{9a^2-14}{50a+50}=-\frac{-2a-2}{50(a+1)}=\frac{-2(a+1)}{50(a+1)}=-\frac{1}{25}.$$

130

Suma y resta combinadas de fracciones

P r o c e d i m i e n t o

1. Se halla el M.C.D. (hay que factorizar los denominadores con antelación)
2. Se divide el mínimo común denominador por cada denominador, y el resultado se multiplica por el numerador respectivo
3. Los productos obtenidos en el paso anterior se dejan con el mismo signo si la fracción está precedida por el signo más y se cambia el signo de cada uno de los términos del producto si la fracción está precedida por el signo menos
4. Se reducen los términos semejantes
5. Se simplifica

Simplificar:

1. $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{4x-7}{x^2-x-6}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6} \Leftrightarrow \frac{2}{(x-3)}+\frac{3}{(x+2)}-\frac{4x-7}{(x-3)(x+2)} \qquad \{\text{factorizando los denominadores}\}$$

El m.c.d. es $(x-3)(x+2)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$(x-3)(x+2)\div(x-3)=x+2 \quad \text{y} \quad (x+2)(2)=2x+4$

$(x-3)(x+2)\div(x+2)=x-3 \quad \text{y} \quad (x-3)(3)=3x-9$

$4x-7$

De tal manera que:

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{2x+4+3x-9-4x+7}{(x-3)(x+2)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{x+2}{(x-3)(x+2)} \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore \quad \frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{1}{x-3} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

2. $\dfrac{a}{3a+6}-\dfrac{1}{6a+12}+\dfrac{a+12}{12a+24}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24} \Leftrightarrow \frac{a}{3(a+2)}-\frac{1}{6(a+2)}+\frac{a+12}{12(a+2)} \qquad \{\text{factorizando los denominadores}\}$$

El m.c.d. es $12(a+2)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$12(a+2)\div 3(a+2)=4 \quad \text{y} \quad 4(a)=4a$

$12(a+2)\div 6(a+2)=2 \quad \text{y} \quad 2(1)=2$

$a+12$

De tal manera que:

$$\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{4a-2+a+12}{12(a+2)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{5a+10}{12(a+2)} \qquad \{\text{reduciendo}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{5(a+2)}{12(a+2)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{5}{12} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

3. $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{x^2}$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es $3x^2(x^2+1)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$3x^2(x^2+1)\div(x^2+1)=3x^2 \quad \text{y} \quad 3x^2(x)=3x^3$

$3x^2(x^2+1)\div 3x=x(x^2+1) \quad \text{y} \quad x(x^2+1)(1)=x^3+x$

$3x^2(x^2+1)\div x^2=3(x^2+1) \quad \text{y} \quad 3(x^2+1)(1)=3x^2+3$

De tal manera que:

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{x^2}=\frac{3x^3+x^3+x-(3x^2+3)}{3x^2(x^2+1)}=\frac{3x^3+x^3+x-3x^2-3}{3x^2(x^2+1)};$$

$$\therefore \quad \frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{x^2}=\frac{4x^3-3x^2+x-3}{3x^2(x^2+1)} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

4. $\dfrac{a+3}{a^2-1}+\dfrac{a-1}{2a+2}+\dfrac{a-4}{4a-4}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{a+3}{a^2-1}+\frac{a-1}{2a+2}+\frac{a-4}{4a-4} \Leftrightarrow \frac{a+3}{(a+1)(a-1)}+\frac{a-1}{2(a+1)}+\frac{a-4}{4(a-1)} \qquad \{\text{factorizando los denominadores}\}$$

El m.c.d. es $4(a+1)(a-1)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$4(a+1)(a-1) \div (a+1)(a-1) = 4 \quad \text{y} \quad 4(a+3) = 4a+12$

$4(a+1)(a-1) \div 2(a+1) = 2(a-1) \quad \text{y} \quad 2(a-1)(a-1) = 2a^2-4a+2$

$4(a+1)(a-1) \div 4(a-1) = a+1 \quad \text{y} \quad (a+1)(a-4) = a^2-3a-4$

De tal manera que:

$$\frac{a+3}{a^2-1}+\frac{a-1}{2a+2}+\frac{a-4}{4a-4} = \frac{4a+12+2a^2-4a+2+a^2-3a-4}{4(a+1)(a-1)};$$

$$\therefore \quad \frac{a+3}{a^2-1}+\frac{a-1}{2a+2}+\frac{a-4}{4a-4} = \frac{3a^2-3a+10}{4(a+1)(a-1)} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

5. $\dfrac{a-b}{a^2+ab}+\dfrac{a+b}{ab}-\dfrac{a}{ab+b^2}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{ab}-\frac{a}{ab+b^2} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a(a+b)}+\frac{a+b}{ab}-\frac{a}{b(a+b)} \qquad \{\text{factorizando los denominadores}\}$$

El m.c.d. es $ab(a+b)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$ab(a+b) \div a(a+b) = b \quad \text{y} \quad b(a-b) = ab-b^2$

$ab(a+b) \div ab = a+b \quad \text{y} \quad (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$

$ab(a+b) \div b(a+b) = a \quad \text{y} \quad a(a) = a^2$

De tal manera que:

$$\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{ab}-\frac{a}{ab+b^2} = \frac{ab-b^2+a^2+2ab+b^2-a^2}{ab(a+b)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{ab}-\frac{a}{ab+b^2} = \frac{3ab}{ab(a+b)} \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{ab}-\frac{a}{ab+b^2} = \frac{3}{a+b} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

6. $\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{4x^2}{x^2-y^2}$

Solución:

$$\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{4x^2}{x^2-y^2} \Leftrightarrow \frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{4x^2}{(x+y)(x-y)} \quad \{\text{factorizando los denominadores}\}$$

El m.c.d. es $(x+y)(x-y)$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$(x+y)(x-y) \div (x+y) = x-y \quad \text{y} \quad (x-y)(x-y) = x^2-2xy+y^2$$
$$(x+y)(x-y) \div (x-y) = (x+y)) \quad \text{y} \quad (x+y)(x+y) = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)(x-y) \div (x+y)(x-y) = 1 \quad \text{y} \quad 1 \times 4x^2 = 4x^2$$

De tal manera que:

$$\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{4x^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2-2xy+y^2-(x^2+2xy+y^2)+4x^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2+4x^2}{(x+y)(x-y)};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{4x^2}{x^2-y^2} = \frac{4x^2-4xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{4x(x-y)}{(x+y)(x-y)} \quad \{\text{reduciendo y factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{4x^2}{x^2-y^2} = \frac{4x}{x+y} \quad \{\text{simplificando}\}.$$

22. $\dfrac{1-x^2}{9-x^2}-\dfrac{x^2}{9+6x+x^2}-\dfrac{6x}{9-6x+x^2}$

Solución:

$$\frac{1-x^2}{9-x^2}-\frac{x^2}{9+6x+x^2}-\frac{6x}{9-6x+x^2} \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(3-x)(3+x)}-\frac{x^2}{(3+x)^2}-\frac{6x}{(3-x)^2}$$

$\{\text{factorizando los denominadores}\}$

El m.c.d. es $(3+x)^2(3-x)^2$

Dividimos el m.c.d. por cada denominador, y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$(3+x)^2(3-x)^2 \div (3-x)(3+x) = (3-x)(3+x) = 9-x^2 \quad \text{y} \quad (9-x^2)(1-x^2) = 9-10x^2+x^4$$
$$(3+x)^2(3-x)^2 \div (3+x)^2 = (3-x)^2 \quad \text{y} \quad (3-x)^2 \times x^2 = 9x^2-6x^3+x^4$$
$$(3+x)^2(3-x)^2 \div (3-x)^2 = (3+x)^2 \quad \text{y} \quad (3+x)^2 \times 6x = 54x+36x^2+6x^3$$

De tal manera que:

$$\frac{1-x^2}{9-x^2}-\frac{x^2}{9+6x+x^2}-\frac{6x}{9-6x+x^2} = \frac{9-10x^2+x^4-(9x^2-6x^3+x^4)-(54x+36x^2+6x^3)}{(3+x)^2(3-x)^2},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-x^2}{9-x^2}-\frac{x^2}{9+6x+x^2}-\frac{6x}{9-6x+x^2} = \frac{9-10x^2+x^4-9x^2+6x^3-x^4-54x-36x^2-6x^3}{(3+x)^2(3-x)^2},$$

$$\therefore \quad \frac{1-x^2}{9-x^2}-\frac{x^2}{9+6x+x^2}-\frac{6x}{9-6x+x^2} = \frac{9-54x-55x^2}{(3+x)^2(3-x)^2}.$$

Suma y resta combinadas de fracciones

Cambios de signos en la suma y resta de fracciones

P r o c e d i m i e n t o

1. Se ordenan los polinomios alfabéticamente y en forma descendente
2. Se cambia el signo de la fracción y los signos de los términos en el denominador con el objeto de que el primer término de los denominadores sea positivo
3. Se factorizan los denominadores
4. Se deduce el m.c.d. (mínimo común denominador)
5. Se divide el m.c.d. por cada denominador y el resultado se multiplica por el numerador respectivo
6. Se destruuyen paréntesis, se reduce y se simplifica

Simplificar:

1. $\dfrac{1}{m-n}+\dfrac{m}{n^2-m^2}$

S o l u c i ó n :

$$\frac{1}{m-n}+\frac{m}{n^2-m^2}=\frac{1}{m-n}-\frac{m}{m^2-n^2}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del último denominador y se ordena éste alfabéticamente},

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m-n}+\frac{m}{n^2-m^2}=\frac{1}{(m-n)}-\frac{m}{(m-n)(m+n)} \quad \text{\{factorizando los denominadores\};}$$

El m.c.d. es $(m-n)(m+n)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{1}{m-n}+\frac{m}{n^2-m^2}=\frac{(m+n)-m}{(m-n)(m+n)};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{m-n}+\frac{m}{n^2-m^2}=\frac{n}{(m-n)(m+n)}=\frac{n}{m^2-n^2} \quad \text{\{reduciendo\}.}$$

2. $\dfrac{x^2}{x^2-xy}-\dfrac{2x}{y-x}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{x^2}{x^2-xy}-\frac{2x}{y-x}=\frac{x^2}{x^2-xy}+\frac{2x}{x-y}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del último denominador y se ordena éste alfabéticamente},

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{x^2-xy}-\dfrac{2x}{y-x}=\dfrac{x^2}{x(x-y)}+\dfrac{2x}{(x-y)}$ {factorizando los denominadores};

El m.c.d. es $x(x-y)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{x^2}{x^2-xy}-\frac{2x}{y-x}=\frac{x^2+2x^2}{x(x-y)},$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{x^2-xy}-\dfrac{2x}{y-x}=\dfrac{3x^2}{x(x-y)}$ {reduciendo};

$\therefore \quad \dfrac{x^2}{x^2-xy}-\dfrac{2x}{y-x}=\dfrac{3x}{x-y}$ {simplificando}.

3. $\dfrac{1}{2x-x^2}+\dfrac{x}{x^2-4}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{1}{2x-x^2}+\frac{x}{x^2-4}=-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x}{x^2-4}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del primer denominador y se ordena éste de forma descendente},

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2x-x^2}+\dfrac{x}{x^2-4}=-\dfrac{1}{x(x-2)}+\dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$ {factorizando los denominadores};

El m.c.d. es $x(x-2)(x+2)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{1}{2x-x^2}+\frac{x}{x^2-4}=\frac{-(x+2)+x^2}{x(x-2)(x+2)},$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2x-x^2}+\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{-x-2+x^2}{x(x-2)(x+2)}$ {destruyendo paréntesis};

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2x-x^2}+\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{x^2-x-2}{x(x-2)(x+2)}$ {ordenando},

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2x-x^2}+\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)(x+2)}$ {factorizando};

$\therefore \quad \dfrac{1}{2x-x^2}+\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{x+1}{x(x+2)}$ {simplificando}.

4. $\dfrac{a+b}{a^2-ab}+\dfrac{a}{b^2-a^2}$

Solución:

$$\frac{a+b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-a^2}=\frac{a+b}{a^2-ab}-\frac{a}{a^2-b^2}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del segundo denominador y se ordena éste de forma descendente},

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-a^2}=\frac{a+b}{a(a-b)}-\frac{a}{(a-b)(a+b)} \quad \text{\{factorizando los denominadores\};}$$

El m.c.d. es $a(a-b)(a+b)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{a+b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-a^2}=\frac{(a+b)(a+b)-a^2}{a(a-b)(a+b)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-a^2}=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2}{a(a-b)(a+b)} \quad \text{\{destruyendo paréntesis\};}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-a^2}=\frac{2ab+b^2}{a(a-b)(a+b)}=\frac{2ab+b^2}{a(a^2-b^2)} \quad \text{\{reduciendo\}.}$$

5. $\dfrac{x-4}{x^2-2x-3}-\dfrac{x}{6-2x}$

Solución:

$$\frac{x-4}{x^2-2x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{x-4}{x^2-2x-3}+\frac{x}{2x-6}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del segundo denominador y se ordena éste de forma descendente},

$$\Rightarrow \quad \frac{x-4}{x^2-2x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{x-4}{(x-3)(x+1)}+\frac{x}{2(x-3)} \quad \text{\{factorizando los denominadores\};}$$

El m.c.d. es $2(x-3)(x+1)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{x-4}{x^2-2x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{2(x-4)+x(x+1)}{2(x-3)(x+1)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-4}{x^2-2x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{2x-8+x^2+x}{2(x-3)(x+1)} \quad \text{\{destruyendo paréntesis\};}$$

$$\therefore \quad \frac{x-4}{x^2-2x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{x^2+3x-8}{2(x-3)(x+1)} \quad \text{\{reduciendo\}.}$$

6. $\dfrac{1}{x^2+2x-8}+\dfrac{1}{(2-x)(x+3)}$

Solución:

$$\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{(2-x)(x+3)}=\frac{1}{x^2+2x-8}-\frac{1}{(x-2)(x+3)}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del segundo denominador},

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{(2-x)(x+3)}=\frac{1}{(x+4)(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x+3)} \quad \text{\{factorizando los denominadores\};}$$

El m.c.d. es $(x+4)(x-2)(x+3)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{(2-x)(x+3)}=\frac{x+3-(x+4)}{(x+4)(x-2)(x+3)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{(2-x)(x+3)}=\frac{x+3-x-4}{(x+4)(x-2)(x+3)} \quad \text{\{destruyendo paréntesis\};}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{(2-x)(x+3)}=\frac{-1}{(x+4)(x-2)(x+3)}=\frac{1}{(x+4)(2-x)(x+3)} \quad \text{\{reduciendo\}.}$$

7. $\dfrac{1}{2x+2}+\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{7}{4x-4}$

Solución:

$$\frac{1}{2x+2}+\frac{2}{1-x}+\frac{7}{4x-4}=\frac{1}{2x+2}-\frac{2}{x-1}+\frac{7}{4x-4}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del segundo denominador},

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2x+2}+\frac{2}{1-x}+\frac{7}{4x-4}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{2}{(x-1)}+\frac{7}{4(x-1)} \quad \text{\{factorizando los denominadores\};}$$

El m.c.d. es $4(x-1)(x+1)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{1}{2x+2}+\frac{2}{1-x}+\frac{7}{4x-4}=\frac{2(x-1)-8(x+1)+7(x+1)}{4(x-1)(x+1)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2x+2}+\frac{2}{1-x}+\frac{7}{4x-4}=\frac{2x-2-8x-8+7x+7}{4(x-1)(x+1)} \quad \text{\{destruyendo paréntesis\};}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2x+2}+\frac{2}{1-x}+\frac{7}{4x-4}=\frac{x-3}{4(x-1)(x+1)} \quad \text{\{reduciendo\}.}$$

8. $\dfrac{2a}{a+3}+\dfrac{3a}{a-3}+\dfrac{2a}{9-a^2}$

Solución:

$$\frac{2a}{a+3}+\frac{3a}{a-3}+\frac{2a}{9-a^2}=\frac{2a}{a+3}+\frac{3a}{a-3}-\frac{2a}{a^2-9}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del terver denominador y se ordena éste de forma descendente},

$\Rightarrow \quad \dfrac{2a}{a+3}+\dfrac{3a}{a-3}+\dfrac{2a}{9-a^2}=\dfrac{2a}{(a+3)}+\dfrac{3a}{(a-3)}-\dfrac{2a}{(a+3)(a-3)}$ {factorizando los denominadores};

El m.c.d. es $(a+3)(a-3)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{2a}{a+3}+\frac{3a}{a-3}+\frac{2a}{9-a^2}=\frac{2a(a-3)+3a(a+3)-2a}{(a+3)(a-3)},$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2a}{a+3}+\dfrac{3a}{a-3}+\dfrac{2a}{9-a^2}=\dfrac{2a^2-6a+3a^2+9a-2a}{(a+3)(a-3)}$ {destruyendo paréntesis};

$\therefore \quad \dfrac{2a}{a+3}+\dfrac{3a}{a-3}+\dfrac{2a}{9-a^2}=\dfrac{5a^2+a}{(a+3)(a-3)}=\dfrac{5a^2+a}{a^2-9}$ {reduciendo}.

9. $\dfrac{x+3y}{y+x}+\dfrac{3y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x}{y-x}$

Solución:

$$\frac{x+3y}{y+x}+\frac{3y^2}{x^2-y^2}-\frac{x}{y-x}=\frac{x+3y}{x+y}+\frac{3y^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{x-y}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del tercer denominador y se ordena éste y el primero alfabéticamente},

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+3y}{y+x}+\dfrac{3y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x}{y-x}=\dfrac{x+3y}{(x+y)}+\dfrac{3y^2}{(x+y)(x-y)}+\dfrac{x}{(x-y)}$ {factorizando los denominadores};

El m.c.d. es $(x+y)(x-y)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{x+3y}{y+x}+\frac{3y^2}{x^2-y^2}-\frac{x}{y-x}=\frac{(x+3y)(x-y)+3y^2+x(x+y)}{(x+y)(x-y)},$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+3y}{y+x}+\dfrac{3y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x}{y-x}=\dfrac{x^2+2xy-3y^2+3y^2+x^2+xy}{(x+y)(x-y)}$ {destruyendo paréntesis};

$\therefore \quad \dfrac{x+3y}{y+x}+\dfrac{3y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x}{y-x}=\dfrac{2x^2+3xy}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{2x^2+3xy}{x^2-y^2}$ {reduciendo}.

10. $\dfrac{x}{x^2+2x-3}+\dfrac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\dfrac{1}{x+2}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{x}{x^2+2x-3}+\frac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x^2+2x-3}-\frac{x-3}{(x-1)(x+2)}+\frac{1}{x+2}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del segundo denominador},

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x^2+2x-3}+\frac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\frac{1}{x+2}=\frac{x}{(x+3)(x-1)}-\frac{x-3}{(x-1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)}$$

{factorizando los denominadores};

El m.c.d. es $(x+3)(x-1)(x+2)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{x}{x^2+2x-3}+\frac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\frac{1}{x+2}=\frac{x(x+2)-(x-3)(x+3)+(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)(x+2)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x^2+2x-3}+\frac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\frac{1}{x+2}=\frac{x^2+2x-x^2+9+x^2+2x-3}{(x+3)(x-1)(x+2)} \quad \text{\{destruyendo paréntesis\};}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{x^2+2x-3}+\frac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\frac{1}{x+2}=\frac{x^2+4x+6}{(x+3)(x-1)(x+2)} \quad \text{\{reduciendo\}.}$$

11. $\dfrac{3}{2a+2}-\dfrac{1}{4a-4}-\dfrac{4}{8-8a^2}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{3}{2a+2}-\frac{1}{4a-4}-\frac{4}{8-8a^2}=\frac{3}{2a+2}-\frac{1}{4a-4}+\frac{4}{8a^2-8}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del tercer denominador},

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2a+2}-\frac{1}{4a-4}-\frac{4}{8-8a^2}=\frac{3}{2(a+1)}-\frac{1}{4(a-1)}+\frac{4}{8(a+1)(a-1)} \quad \text{\{factorizando los denominadores\};}$$

El m.c.d. es $8(a+1)(a-1)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{3}{2a+2}-\frac{1}{4a-4}-\frac{4}{8-8a^2}=\frac{12(a-1)-2(a+1)+4}{8(a+1)(a-1)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2a+2}-\frac{1}{4a-4}-\frac{4}{8-8a^2}=\frac{12a-12-2a-2+4}{8(a+1)(a-1)} \quad \text{\{destruyendo paréntesis\};}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2a+2}-\frac{1}{4a-4}-\frac{4}{8-8a^2}=\frac{10a-10}{8(a+1)(a-1)} \quad \text{\{reduciendo\},}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2a+2}-\frac{1}{4a-4}-\frac{4}{8-8a^2}=\frac{10(a-1)}{8(a+1)(a-1)} \quad \text{\{factorizando\};}$$

$$\therefore \quad \frac{3}{2a+2}-\frac{1}{4a-4}-\frac{4}{8-8a^2}=\frac{5}{4(a+1)} \quad \text{\{simplificando\}.}$$

12. $\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{a+1}{(3-a)(a-2)}+\dfrac{2}{(2-a)(1-a)}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{1}{a-3}+\frac{a+1}{(3-a)(a-2)}+\frac{2}{(2-a)(1-a)}=\frac{1}{a-3}-\frac{a+1}{(a-3)(a-2)}+\frac{2}{(a-2)(a-1)}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del segundo denominador. El signo de la tercera fracción permanece constante por que se cambia de signo a los dos factores del denominador y sabemos por la "ley de los signos" que $-$ por $-$ da $+$};

El m.c.d. es $(a-1)(a-2)(a-3)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{1}{a-3}+\frac{a+1}{(3-a)(a-2)}+\frac{2}{(2-a)(1-a)}=\frac{(a-1)(a-2)-(a+1)(a-1)+2(a-3)}{(a-1)(a-2)(a-3)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a-3}+\frac{a+1}{(3-a)(a-2)}+\frac{2}{(2-a)(1-a)}=\frac{a^2-3a+2-a^2+1+2a-6}{(a-1)(a-2)(a-3)} \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a-3}+\frac{a+1}{(3-a)(a-2)}+\frac{2}{(2-a)(1-a)}=\frac{-a-3}{(a-1)(a-2)(a-3)}=-\frac{a+3}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\frac{a+3}{(1-a)(a-2)(a-3)}.$$

13. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{2x^3+2x^2}{1-x^3}+\dfrac{1}{x^2+x+1}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{2x^3+2x^2}{1-x^3}+\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{2x}{x-1}-\frac{2x^3+2x^2}{x^3-1}+\frac{1}{x^2+x+1}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del segundo denominador},

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{x-1}+\frac{2x^3+2x^2}{1-x^3}+\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{2x}{x-1}-\frac{2x^3+2x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{1}{x^2+x+1} \qquad \{\text{factorizando los denominadores}\};$$

El m.c.d. es $(x-1)(x^2+x+1)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{2x^3+2x^2}{1-x^3}+\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{2x(x^2+x+1)-(2x^3+2x^2)+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{x-1}+\frac{2x^3+2x^2}{1-x^3}+\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\};$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{x-1}+\frac{2x^3+2x^2}{1-x^3}+\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{3x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{3x-1}{x^3-1} \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

14. $\frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}$

Solución:

$$\frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}=\frac{x+2}{3x-1}-\frac{x+1}{2x-3}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}$$

{cambiando tanto el signo de la fracción como el del segundo denominador},

$$\Rightarrow \frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}=\frac{x+2}{(3x-1)}-\frac{x+1}{(2x-3)}+\frac{4x^2+6x+3}{(2x-3)(3x-1)}$$ {factorizando los denominadores};

El m.c.d. es $(2x-3)(3x-1)$.

Dividimos el m.c.d. por el denominador de cada término y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}=\frac{(x+2)(2x-3)-(x+1)(3x-1)+4x^2+6x+3}{(2x-3)(3x-1)},$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}=\frac{2x^2+x-6-3x^2-2x+1+4x^2+6x+3}{(2x-3)(3x-1)}$$ {destruyendo paréntesis};

$$\Rightarrow \frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}=\frac{3x^2+5x-2}{(2x-3)(3x-1)}$$ {reduciendo}.

$$\Rightarrow \frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}=\frac{(x+2)(3x-1)}{(2x-3)(3x-1)}$$ {factorizando};

$$\therefore \frac{x+2}{3x-1}+\frac{x+1}{3-2x}+\frac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}=\frac{x+2}{2x-3}$$ {simplificando}.

Operaciones con fracciones

Multilplicación de fracciones

Procedimiento

1. Se factorizan las expresiones en los numeradores y denominadores
2. Se simplifica, cancelando los factores comunes en numeradores y denominadores
3. Se multiplican entre sí las expresiones ubicadas en los numeradores, el resultado será el numerador de la fracción producto; asimismo, se multiplican entre sí las expresiones escritas en los denominadores, este producto será el denominador de la fracción resultado.
Consejo: Para realizar los ejercicios siguientes es indispensable dominar por completo la factorización, por lo cual recomiendo que se estudie primero, concienzudamente, los 10 casos de factorización (Ejercicios 89 a 110).

Simplificar:

1. $\dfrac{2a^2}{3b}\times\dfrac{6b^2}{4a}$

Solución:

$$\frac{2a^2}{3b}\times\frac{6b^2}{4a}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{1}\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad \frac{2a^2}{3\text{b}}\times\frac{6b^2}{4a}=ab\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

2. $\dfrac{x^2y}{5}\times\dfrac{10a^3}{3m^2}\times\dfrac{9m}{x^3}$

Solución:

$$\frac{x^2y}{5}\times\frac{10a^3}{3m^2}\times\frac{9m}{x^3}=\frac{y}{1}\times\frac{2a^3}{m}\times\frac{3}{x}\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad \frac{x^2y}{5}\times\frac{10a^3}{3m^2}\times\frac{9m}{x^3}=\frac{6a^3y}{mx}\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

3. $\dfrac{5x^2}{7y^3}\times\dfrac{4y^2}{7m^3}\times\dfrac{14m}{5x^4}$

Solución:

$$\frac{5x^2}{7y^3}\times\frac{4y^2}{7m^3}\times\frac{14m}{5x^4}=\frac{1}{y}\times\frac{4}{7m^2}\times\frac{2}{x^2}\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad \frac{5x^2}{7y^3}\times\frac{4y^2}{7m^3}\times\frac{14m}{5x^4}=\frac{8}{7m^2x^2y}\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

4. $\dfrac{5}{a}\times\dfrac{2a}{b^2}\times\dfrac{3b}{10}$

Solución:

$$\frac{5}{a}\times\frac{2a}{b^2}\times\frac{3b}{10}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{b}\times\frac{3}{1}\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad \frac{5}{a}\times\frac{2a}{b^2}\times\frac{3b}{10}=\frac{3}{b}\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

5. $\dfrac{2x^3}{15a^3}\times\dfrac{3a^2}{y}\times\dfrac{5x^2}{7xy^2}$

Solución:

$$\frac{2x^3}{15a^3}\times\frac{3a^2}{y}\times\frac{5x^2}{7xy^2}=\frac{2x^3}{a}\times\frac{1}{y}\times\frac{x}{7y^2} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{2x^3}{15a^3}\times\frac{3a^2}{y}\times\frac{5x^2}{7xy^2}=\frac{2x^4}{7ay^3} \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

6. $\dfrac{7a}{6m^2}\times\dfrac{3m}{10n^2}\times\dfrac{5n^4}{14ax}$

Solución:

$$\frac{7a}{6m^2}\times\frac{3m}{10n^2}\times\frac{5n^4}{14ax}=\frac{1}{2m}\times\frac{1}{2}\times\frac{n^2}{2x} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{7a}{6m^2}\times\frac{3m}{10n^2}\times\frac{5n^4}{14ax}=\frac{n^2}{8mx} \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

7. $\dfrac{2x^2+x}{6}\times\dfrac{8}{4x+2}$

Solución:

$$\frac{2x^2+x}{6}\times\frac{8}{4x+2}=\frac{x(2x+1)}{6}\times\frac{8}{2(2x+1)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x^2+x}{6}\times\frac{8}{4x+2}=\frac{x}{3}\times\frac{2}{1} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{2x^2+x}{6}\times\frac{8}{4x+2}=\frac{2x}{3} \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

8. $\dfrac{5x+25}{14}\times\dfrac{7x+7}{10x+50}$

Solución:

$$\frac{5x+25}{14}\times\frac{7x+7}{10x+50}=\frac{5(x+5)}{14}\times\frac{7(x+1)}{10(x+5)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5x+25}{14}\times\frac{7x+7}{10x+50}=\frac{1}{2}\times\frac{x+1}{2} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{5x+25}{14}\times\frac{7x+7}{10x+50}=\frac{x+1}{4} \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

9. $\dfrac{m+n}{mn-n^2}\times\dfrac{n^2}{m^2-n^2}$

Solución:

$$\frac{m+n}{mn-n^2}\times\frac{n^2}{m^2-n^2}=\frac{(m+n)}{n(m-n)}\times\frac{n^2}{(m+n)(m-n)}\qquad\{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad\frac{m+n}{mn-n^2}\times\frac{n^2}{m^2-n^2}=\frac{1}{(m-n)}\times\frac{n}{(m-n)}\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad\frac{m+n}{mn-n^2}\times\frac{n^2}{m^2-n^2}=\frac{n}{m^2-2mn+n^2}\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

10. $\dfrac{xy-2y^2}{x^2+xy}\times\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}$

Solución:

$$\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\times\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}=\frac{y(x-2y)}{x(x+y)}\times\frac{(x+y)^2}{x(x-2y)}\qquad\{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\times\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}=\frac{y}{x}\times\frac{(x+y)}{x}\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\times\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}=\frac{xy+y^2}{x^2}\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

26. $\dfrac{x^2-3xy-10y^2}{x^2-2xy-8y^2}\times\dfrac{x^2-16y^2}{x^2+4xy}\times\dfrac{x^2-6xy}{x+2y}$

Solución:

$$\frac{x^2-3xy-10y^2}{x^2-2xy-8y^2}\times\frac{x^2-16y^2}{x^2+4xy}\times\frac{x^2-6xy}{x+2y}=\frac{(x-5y)(x+2y)}{(x-4y)(x+2y)}\times\frac{(x-4y)(x+4y)}{x(x+4y)}\times\frac{x(x-6y)}{(x+2y)}$$
$$\{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad\frac{x^2-3xy-10y^2}{x^2-2xy-8y^2}\times\frac{x^2-16y^2}{x^2+4xy}\times\frac{x^2-6xy}{x+2y}=\frac{(x-5y)}{1}\times\frac{1}{1}\times\frac{(x-6y)}{(x+2y)}\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad\frac{x^2-3xy-10y^2}{x^2-2xy-8y^2}\times\frac{x^2-16y^2}{x^2+4xy}\times\frac{x^2-6xy}{x+2y}=\frac{x^2-11xy+30y^2}{x+2y}\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

Procedimiento

1. Se reducen a una sola fracción las expresiones mixtas
2. Se multiplican las fracciones resultantes:
a. El numerador del producto es el resultado del producto de los numeradores
b. El denominador del producto es el resultado del producto de los denominadores
c. Se simplifican los factores comunes en el numerador y denominador

Simplificar:

1. $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)$

Solución:

$$\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=\left(\frac{ab+a}{b}\right)\left(\frac{a(b+1)-a}{b+1}\right)=\left(\frac{ab+a}{b}\right)\left(\frac{ab+a-a}{b+1}\right)=\left(\frac{ab+a}{b}\right)\left(\frac{ab}{b+1}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=\frac{(ab+a)ab}{b(b+1)}=\frac{a(b+1)ab}{b(b+1)}=\frac{a^2b(b+1)}{b(b+1)};$$

$$\therefore \quad \left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=\frac{a^2\cancel{b}\,\cancel{(b+1)}}{\cancel{b}\,\cancel{(b+1)}}=a^2 \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

10. $\left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)$

Solución:

$$\left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)=\left(\frac{(a+2x)(2a+x)-14x^2}{2a+x}\right)\left(\frac{(a-x)(a+4x)+a^2+5x^2}{a+4x}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)=\left(\frac{2a^2+5ax+2x^2-14x^2}{2a+x}\right)\left(\frac{a^2+3ax-4x^2+a^2+5x^2}{a+4x}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)=\left(\frac{2a^2+5ax-12x^2}{2a+x}\right)\left(\frac{2a^2+3ax+x^2}{a+4x}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)=\left(\frac{2a^2+5ax-12x^2}{2a+x}\right)\left(\frac{2a^2+3ax+x^2}{a+4x}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)=\left(\frac{(a+4x)(2a-3x)}{2a+x}\right)\left(\frac{(a+x)(2a+x)}{a+4x}\right) \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)=\frac{(a+4x)(2a-3x)(a+x)(2a+x)}{(2a+x)(a+4x)},$$

$$\Rightarrow \quad \left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)=\frac{\cancel{(a+4x)}(2a-3x)(a+x)\cancel{(2a+x)}}{\cancel{(2a+x)}\,\cancel{(a+4x)}}=(2a-3x)(a+x) \quad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \left(a+2x-\frac{14x^2}{2a+x}\right)\left(a-x+\frac{a^2+5x^2}{a+4x}\right)=2a^2-ax-3x^2 \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\}.$$

134

Operaciones con fracciones

División de fracciones

P r o c e d i m i e n t o

Para efectuar la división de fracciones se procede de la siguiente forma:

1. Se invierte el divisor (el numerador se coloca en el denominador y, viceversa, el denominador se ubica en el numerador) y, se procede a multiplicar el dividendo por este divisor invertido
2. Las fracciones se multiplican siguiendo los pasos siguientes:
   a) Se factorizan las expresiones
   b) Se simplifica, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores
   c) Se multiplican entre sí las expresiones que quedan en los numeradores; lo propio se hace con las expresiones que quedan en los denominadores; luego, para el resultado, se ubica en el numerador el producto de los numeradores y en el denominador el producto de los denominadores

Consejo: Para realizar los ejercicios siguientes es indispensable dominar por completo la factorización, por lo cual recomiendo que se estudie primero concienzudamente los 10 casos de factorización (Ejercicios 89 a 110).

S i m p l i f i c a r :

1. $\dfrac{x^2}{3y^2} \div \dfrac{2x}{y^3}$

Solución:

$$\frac{x^2}{3y^2} \div \frac{2x}{y^3} = \frac{x^2}{3y^2} \times \frac{y^3}{2x}$$ {se cambian las ubicaciones respectivas del numerador y el denominador en el divisor y se procede a efectuar el producto entre el dividendo y este divisor invertido},

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{3y^2} \div \frac{2x}{y^3} = \frac{x}{3} \times \frac{y}{2}$$ {simplificando};

$$\therefore \quad \frac{x^2}{3y^2} \div \frac{2x}{y^3} = \frac{xy}{6}$$ {efectuando el producto indicado}.

2. $\dfrac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3$

Solución:

$$\frac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3 = \frac{3a^2b}{5x^2} \times \frac{1}{a^2b^3}$$ {se cambian las ubicaciones respectivas del numerador y el denominador en el divisor y se procede a efectuar el producto entre el dividendo y este divisor invertido},

$\Rightarrow$ $$\frac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3 = \frac{3}{5x^2} \times \frac{1}{b^2}$$ {simplificando};

$\therefore$ $$\frac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3 = \frac{3}{5b^2x^2}$$ {efectuando el producto indicado}.

3. $\dfrac{5m^2}{7n^3} \div \dfrac{10m^4}{14an^4}$

Solución:

$$\frac{5m^2}{7n^3} \div \frac{10m^4}{14an^4} = \frac{5m^2}{7n^3} \times \frac{14an^4}{10m^4}$$ {se cambian las ubicaciones respectivas del numerador y el denominador en el divisor y se procede a efectuar el producto entre el dividendo y este divisor invertido},

$\Rightarrow$ $$\frac{5m^2}{7n^3} \div \frac{10m^4}{14an^4} = \frac{1}{1} \times \frac{an}{m^2}$$ {simplificando};

$\therefore$ $$\frac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3 = \frac{an}{m^2}$$ {efectuando el producto indicado}.

4. $6a^2x^3 \div \dfrac{a^2x}{5}$

Solución:

$$6a^2x^3 \div \frac{a^2x}{5} = 6a^2x^3 \times \frac{5}{a^2x}$$ {se cambian las ubicaciones respectivas del numerador y el denominador en el divisor y se procede a efectuar el producto entre el dividendo y este divisor invertido},

$\Rightarrow$ $$6a^2x^3 \div \frac{a^2x}{5} = 6x^2 \times \frac{5}{1}$$ {simplificando};

$\therefore$ $$6a^2x^3 \div \frac{a^2x}{5} = 30x^2$$ {efectuando el producto indicado}.

5. $\dfrac{15m^2}{19ax^3} \div \dfrac{20y^2}{38a^3x^4}$

Solución:

$$\frac{15m^2}{19ax^3} \div \frac{20y^2}{38a^3x^4} = \frac{15m^2}{19ax^3} \times \frac{38a^3x^4}{20y^2}$$ {se cambian las ubicaciones respectivas del numerador y el denominador en el divisor y se procede a efectuar el producto entre el dividendo y este divisor invertido},

$\Rightarrow$ $$\frac{15m^2}{19ax^3} \div \frac{20y^2}{38a^3x^4} = \frac{3m^2}{1} \times \frac{a^2x}{2y^2}$$ {simplificando};

$\therefore$ $$\frac{15m^2}{19ax^3} \div \frac{20y^2}{38a^3x^4} = \frac{3a^2m^2x}{2y^2}$$ {efectuando el producto indicado}.

Operaciones con fracciones

División de expresiones mixtas

Procedimiento

1. Se reducen a fracciones y se dividen como tales:
2. Se invierte el divisor (el numerador se coloca en el denominador y, viceversa, el denominador se ubica en el numerador) y, se procede a multiplicar el dividendo por este divisor invertido
3. Las fracciones se multiplican siguiendo los pasos siguientes:
 a) Se factorizan las expresiones
 b) Se simplifica, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores
 c) Se multiplican entre sí las expresiones que quedan en los numeradores; lo propio se hace con las expresiones que quedan en los denominadores; luego, para el resultado, se ubica en el numerador el producto de los numeradores y en el denominador el producto de los denominadores

Consejo: Para realizar los ejercicios siguientes es indispensable dominar por completo la factorización, por lo cual recomiendo que se estudie primero concienzudamente los 10 casos de factorización (Ejercicios 89 a 110).

Simplificar:

1. $\left(1+\frac{a}{a+b}\right)\div\left(1+\frac{2a}{b}\right)$

Solución:

$$\left(1+\frac{a}{a+b}\right)\div\left(1+\frac{2a}{b}\right)=\left(\frac{2a+b}{a+b}\right)\div\left(\frac{2a+b}{b}\right)\qquad\{\text{reduciendo a fracciones}\},$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{a}{a+b}\right)\div\left(1+\frac{2a}{b}\right)=\left(\frac{2a+b}{a+b}\right)\times\left(\frac{b}{2a+b}\right)\qquad\{\text{invirtiendo el divisor, y cambiando el signo de opración}\},$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{a}{a+b}\right)\div\left(1+\frac{2a}{b}\right)=\left(\frac{1}{a+b}\right)\times\left(\frac{b}{1}\right)\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\left(1+\frac{a}{a+b}\right)\div\left(1+\frac{2a}{b}\right)=\frac{b}{a+b}\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

2. $\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)\div\left(x-\dfrac{x}{x+1}\right)$

Solución:

$$\left(x-\frac{2}{x+1}\right)\div\left(x-\frac{x}{x+1}\right)=\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)\div\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\quad\{\text{reduciendo a fracciones}\},$$

$$\Rightarrow\quad\left(x-\frac{2}{x+1}\right)\div\left(x-\frac{x}{x+1}\right)=\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)\times\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\quad\{\text{invirtiendo el divisor, y cambiando el signo de operación}\},$$

$$\Rightarrow\quad\left(x-\frac{2}{x+1}\right)\div\left(x-\frac{x}{x+1}\right)=\left(\frac{x^2+x-2}{1}\right)\times\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad\left(x-\frac{2}{x+1}\right)\div\left(x-\frac{x}{x+1}\right)=\frac{x^2+x-2}{x^2}\quad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

3. $\left(1-a+\dfrac{a^2}{1+a}\right)\div\left(1+\dfrac{2}{a^2-1}\right)$

Solución:

$$\left(1-a+\frac{a^2}{1+a}\right)\div\left(1+\frac{2}{a^2-1}\right)=\left(\frac{1}{1+a}\right)\div\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)\quad\{\text{reduciendo a fracciones}\},$$

$$\Rightarrow\quad\left(1-a+\frac{a^2}{1+a}\right)\div\left(1+\frac{2}{a^2-1}\right)=\left(\frac{1}{1+a}\right)\times\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)\quad\{\text{invirtiendo el divisor, y cambiando el signo de operación}\},$$

$$\Rightarrow\quad\left(1-a+\frac{a^2}{1+a}\right)\div\left(1+\frac{2}{a^2-1}\right)=\left(\frac{1}{(a+1)}\right)\times\left(\frac{(a+1)(a-1)}{a^2+1}\right)\quad\{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad\left(1-a+\frac{a^2}{1+a}\right)\div\left(1+\frac{2}{a^2-1}\right)=\left(\frac{1}{1}\right)\times\left(\frac{(a-1)}{a^2+1}\right)\quad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad\left(1-a+\frac{a^2}{1+a}\right)\div\left(1+\frac{2}{a^2-1}\right)=\frac{a-1}{a^2+1}\quad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

4. $\left(x+\dfrac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\dfrac{3}{x+4}\right)$

Solución:

$$\left(x+\frac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\frac{3}{x+4}\right)=\left(\frac{x^2+3x+2}{x+3}\right)\div\left(\frac{x^2+4x+3}{x+4}\right)\quad\{\text{reduciendo a fracciones}\},$$

$$\Rightarrow\quad\left(x+\frac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\frac{3}{x+4}\right)=\left(\frac{x^2+3x+2}{x+3}\right)\times\left(\frac{x+4}{x^2+4x+3}\right)$$

{invirtiendo el divisor, y cambiando el signo de operación},

$$\Rightarrow\quad\left(x+\frac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\frac{3}{x+4}\right)=\left(\frac{(x+2)(x+1)}{x+3}\right)\times\left(\frac{x+4}{(x+3)(x+1)}\right)\quad\{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad\left(x+\frac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\frac{3}{x+4}\right)=\left(\frac{(x+2)}{x+3}\right)\times\left(\frac{x+4}{(x+3)}\right)\quad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad\left(x+\frac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\frac{3}{x+4}\right)=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+8}{x^2+6x+9}\quad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

5. $\left(a+b+\dfrac{b^2}{a-b}\right)\div\left(1-\dfrac{b}{a+b}\right)$

Solución:

$$\left(a+b+\frac{b^2}{a-b}\right)\div\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=\left(\frac{a^2}{a-b}\right)\div\left(\frac{a}{a+b}\right)\qquad\{\text{reduciendo a fracciones}\},$$

$$\Rightarrow\quad\left(a+b+\frac{b^2}{a-b}\right)\div\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=\left(\frac{a^2}{a-b}\right)\times\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

{invirtiendo el divisor, y cambiando el signo de operación},

$$\Rightarrow\quad\left(a+b+\frac{b^2}{a-b}\right)\div\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=\left(\frac{a}{a-b}\right)\times\left(\frac{a+b}{1}\right)\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad\left(a+b+\frac{b^2}{a-b}\right)\div\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=\frac{a(a+b)}{a-b}=\frac{a^2+ab}{a-b}\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

136

Operaciones con fracciones
Multiplicación y división combinadas

Procedimiento

1. Se invierten las fracciones precedidas del signo de división y se cambia el signo operativo por la *x*

2. Las fracciones se multiplican siguiendo los pasos siguientes:

- **a)** Se factorizan las expresiones
- **b)** Se simplifica, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores
- **c)** Se multiplican entre sí las expresiones que quedan en los numeradores; lo propio se hace con las expresiones que quedan en los denominadores; luego, para el resultado, se ubica en el numerador el producto de los numeradores y en el denominador el producto de los denominadores

Consejo: Para realizar los ejercicios siguientes es indispensable dominar por completo la factorización, por lo cual recomiendo que se estudie primero concienzudamente los 10 casos de factorización (Ejercicios 89 a 110).

Simplificar

1. $\frac{3x}{4y}\times\frac{8y}{9x}\div\frac{z^2}{3x^2}$

Solución:

$$\frac{3x}{4y}\times\frac{8y}{9x}\div\frac{z^2}{3x^2}=\frac{3x}{4y}\times\frac{8y}{9x}\times\frac{3x^2}{z^2}$$

{invirtiendo la fracción precedida de $\div$ y cambiando el signo operativo},

$$\Rightarrow \frac{3x}{4y}\times\frac{8y}{9x}\div\frac{z^2}{3x^2}=\frac{1}{1}\times\frac{2}{1}\times\frac{x^2}{z^2} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \frac{3x}{4y}\times\frac{8y}{9x}\div\frac{z^2}{3x^2}=\frac{2x^2}{z^2} \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

2. $\frac{5a}{b}\div\left(\frac{2a}{b^2}\times\frac{5x}{4a^2}\right)$

Solución:

$$\frac{5a}{b}\div\left(\frac{2a}{b^2}\times\frac{5x}{4a^2}\right)=\frac{5a}{b}\times\frac{b^2}{2a}\times\frac{4a^2}{5x}$$

{invirtiendo las fraccciones precdidas de $\div$ y cambiando el signo operativo},

$$\Rightarrow \frac{5a}{b}\div\left(\frac{2a}{b^2}\times\frac{5x}{4a^2}\right)=\frac{1}{1}\times\frac{b}{1}\times\frac{2a^2}{x} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \frac{5a}{b}\div\left(\frac{2a}{b^2}\times\frac{5x}{4a^2}\right)=\frac{2a^2b}{x} \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

3. $\frac{a+1}{a-1}\times\frac{3a-3}{2a+2}\div\frac{a^2+a}{a^2+a-2}$

Solución:

$$\frac{a+1}{a-1}\times\frac{3a-3}{2a+2}\div\frac{a^2+a}{a^2+a-2}=\frac{a+1}{a-1}\times\frac{3a-3}{2a+2}\times\frac{a^2+a-2}{a^2+a}$$

{invirtiendo la fracción precedida de $\div$ y cambiando el signo operativo},

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a-1}\times\frac{3a-3}{2a+2}\div\frac{a^2+a}{a^2+a-2}=\frac{(a+1)}{(a-1)}\times\frac{3(a-1)}{2(a+1)}\times\frac{(a+2)(a-1)}{a(a+1)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a-1}\times\frac{3a-3}{2a+2}\div\frac{a^2+a}{a^2+a-2}=\frac{1}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{(a+2)(a-1)}{a(a+1)} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \frac{a+1}{a-1}\times\frac{3a-3}{2a+2}\div\frac{a^2+a}{a^2+a-2}=\frac{3a^2+3a-6}{a^2+a} \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

4. $\frac{64a^2-81b^2}{x^2-81}\times\frac{(x-9)^2}{8a-9b}\div\frac{8a^2+9ab}{(x+9)^2}$

Solución:

$$\frac{64a^2-81b^2}{x^2-81}\times\frac{(x-9)^2}{8a-9b}\div\frac{8a^2+9ab}{(x+9)^2}=\frac{64a^2-81b^2}{x^2-81}\times\frac{(x-9)^2}{8a-9b}\times\frac{(x+9)^2}{8a^2+9ab}$$

{invirtiendo la fraccción precdida de $\div$ y cambiando el signo operativo},

$$\Rightarrow \frac{64a^2-81b^2}{x^2-81}\times\frac{(x-9)^2}{8a-9b}\div\frac{8a^2+9ab}{(x+9)^2}=\frac{(8a+9b)(8a-9b)}{(x+9)(x-9)}\times\frac{(x-9)^2}{(8a-9b)}\times\frac{(x+9)^2}{a(8a+9b)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \frac{64a^2-81b^2}{x^2-81}\times\frac{(x-9)^2}{8a-9b}\div\frac{8a^2+9ab}{(x+9)^2}=\frac{1}{1}\times\frac{(x-9)}{1}\times\frac{(x+9)}{a} \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \frac{64a^2-81b^2}{x^2-81}\times\frac{(x-9)^2}{8a-9b}\div\frac{8a^2+9ab}{(x+9)^2}=\frac{(x-9)(x+9)}{a}=\frac{x^2-81}{a} \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

5. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-49}\times\dfrac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\dfrac{x^2-5x-24}{x+5}$

Solución:

$$\frac{x^2-x-12}{x^2-49}\times\frac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\frac{x^2-5x-24}{x+5}=\frac{x^2-x-12}{x^2-49}\times\frac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\times\frac{x+5}{x^2-5x-24}$$

{invirtiendo la fracción precedida de $\div$ y cambiando el signo operativo},

$$\Rightarrow\quad \frac{x^2-x-12}{x^2-49}\times\frac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\frac{x^2-5x-24}{x+5}=\frac{(x-4)(x+3)}{(x+7)(x-7)}\times\frac{(x-8)(x+7)}{(x+5)(x-4)}\times\frac{(x+5)}{(x-8)(x+3)}\qquad\{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x^2-x-12}{x^2-49}\times\frac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\frac{x^2-5x-24}{x+5}=\frac{1}{(x-7)}\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad \frac{x^2-x-12}{x^2-49}\times\frac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\frac{x^2-5x-24}{x+5}=\frac{1}{x-7}\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

6. $\dfrac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\times\dfrac{a^2-36}{a^2-1}\div\dfrac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}$

Solución:

$$\frac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\times\frac{a^2-36}{a^2-1}\div\frac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}=\frac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\times\frac{a^2-36}{a^2-1}\times\frac{a^2-4a-5}{a^2-a-42}$$

{invirtiendo las fraccciones precedidas de $\div$ y cambiando el signo operativo},

$$\Rightarrow\quad \frac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\times\frac{a^2-36}{a^2-1}\div\frac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}=\frac{(a-7)(a-1)}{(a-6)(a-5)}\times\frac{(a+6)(a-6)}{(a+1)(a-1)}\times\frac{(a-5)(a+1)}{(a-7)(a+6)}\qquad\{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\times\frac{a^2-36}{a^2-1}\div\frac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad \frac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\times\frac{a^2-36}{a^2-1}\div\frac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}=\frac{1}{1}=1\qquad\{\text{efectuando el producto indicado}\}.$$

137

Operaciones con fracciones

Simplificación de fracciones complejas

P r o c e d i m i e n t o

1. Se reducen las expresiones, tanto en el numerador como en el denominador, a una sola fracción
2. Se aplica la "ley de la oreja"
Nota: la llamada "ley de la oreja" consiste en reducir una fracción compleja en una fracción normal : se multiplican los extremos de la fracción compleja enre si para obtener el numerador; se multiplican los medios entre si para obtener el denominador

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

S i m p l i f i c a r :

1. $\dfrac{a-\dfrac{a}{b}}{b-\dfrac{1}{b}}$

Solución:

$$\frac{a-\frac{a}{b}}{b-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{ab-a}{b}}{\frac{b^2-1}{b}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a-\frac{a}{b}}{b-\frac{1}{b}}=\frac{b(ab-a)}{b(b^2-1)} \qquad \{\text{aplicando la "ley de la oreja"}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a-\frac{a}{b}}{b-\frac{1}{b}}=\frac{ab(b-1)}{b(b-1)(b+1)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{a-\frac{a}{b}}{b-\frac{1}{b}}=\frac{a}{b+1} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

2. $\dfrac{x^2-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

Solución:

$$\frac{x^2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x^3-1}{x}}{\frac{x-1}{x}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x(x^3-1)}{x(x-1)} \qquad \{\text{aplicando la "ley de la oreja"}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=x^2+x+1 \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

3. $\dfrac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}}$

Solución:

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a+b}{a}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{a(a^2-b^2)}{ab(a+b)} \qquad \{\text{aplicando la "ley de la oreja"}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{a(a-b)(a+b)}{ab(a+b)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{a-b}{b} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

4. $\dfrac{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}}$

Solución:

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{\frac{m+n}{mn}}{\frac{n-m}{mn}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{mn(m+n)}{mn(n-m)} \qquad \{\text{aplicando la "ley de la oreja"}\};$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{m+n}{n-m} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

5. $\dfrac{x+\dfrac{x}{2}}{x-\dfrac{x}{4}}$

Solución:

$$\frac{x+\dfrac{x}{2}}{x-\dfrac{x}{4}}=\frac{\dfrac{2x+x}{2}}{\dfrac{4x-x}{4}}=\frac{\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{4}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+\dfrac{x}{2}}{x-\dfrac{x}{4}}=\frac{12x}{6x} \qquad \{\text{aplicando la "ley de la oreja"}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x+\dfrac{x}{2}}{x-\dfrac{x}{4}}=2 \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

6. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}$

Solución:

$$\frac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}=\frac{\dfrac{x^2-y^2}{xy}}{\dfrac{x+y}{x}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}=\frac{x(x^2-y^2)}{xy(x+y)} \qquad \{\text{aplicando la "ley de la oreja"}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}=\frac{x(x+y)(x-y)}{xy(x+y)} \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}=\frac{x-y}{y} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

P r o c e d i m i e n t o

1. Se reducen las expresiones, tanto en el numerador como en el denominador, a una sola fracción
2. Se aplica la "ley de la oreja"
Nota: la llamada "ley de la oreja" consiste en reducir una fracción compleja en una fracción simple: se multiplican los extremos de la fracción compleja enre si para obtener el numerador; se multiplican los medios entre si para obtener el denominador

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

S i m p l i f i c a r :

1. $\dfrac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$

Solución:

$$\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x-1+x+1}{x-1}}{\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{(x-1)(x+1)}},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=\frac{2x(x-1)(x+1)}{2(x-1)}\qquad \{\text{aplicando la "ley de la oreja"}\};$$

$$\therefore\quad \frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=x(x+1)=x^2+x\qquad \{\text{simplificando}\}.$$

2. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{2x+6}{x+1}}$

Solución:

$$\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}}{\frac{x-2}{x}+\frac{2x+6}{x+1}}=\frac{\frac{x+1+2(x-1)}{(x-1)(x+1)}}{\frac{(x-2)(x+1)+x(2x+6)}{x(x+1)}}=\frac{\frac{x+1+2x-2}{(x-1)(x+1)}}{\frac{x^2-x-2+2x^2+6x}{x(x+1)}}=\frac{\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}}{\frac{3x^2+5x-2}{x(x+1)}},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}}{\frac{x-2}{x}+\frac{2x+6}{x+1}}=\frac{x(x+1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)(3x^2+5x-2)}\qquad \{\text{aplicando la "ley de la oreja"}\},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}}{\frac{x-2}{x}+\frac{2x+6}{x+1}}=\frac{x(x+1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)(3x-1)}\qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore\quad \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}}{\frac{x-2}{x}+\frac{2x+6}{x+1}}=\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{x}{x^2+x-2}\qquad \{\text{simplificando}\}.$$

25. $\dfrac{1}{a+2-\dfrac{a+1}{a-\dfrac{1}{a}}}$

Solución:

$$\frac{1}{a+2-\dfrac{a+1}{a-\dfrac{1}{a}}}=\frac{1}{a+2-\dfrac{a+1}{\dfrac{a^2-1}{a}}}=\frac{1}{a+2-\dfrac{\dfrac{a+1}{1}}{\dfrac{a^2-1}{a}}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a+2-\dfrac{a+1}{a-\dfrac{1}{a}}}=\frac{1}{a+2-\dfrac{a(a+1)}{a^2-1}}=\frac{1}{a+2-\dfrac{a(a+1)}{(a+1)(a-1)}}=\frac{1}{a+2-\dfrac{a}{a-1}}=\frac{1}{\dfrac{(a-1)(a+2)-a}{a-1}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a+2-\dfrac{a+1}{a-\dfrac{1}{a}}}=\frac{1}{\dfrac{a^2+a-2-a}{a-1}}=\frac{1}{\dfrac{a^2-2}{a-1}}=\frac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{a^2-2}{a-1}};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a+2-\dfrac{a+1}{a-\dfrac{1}{a}}}=\frac{a-1}{a^2-2}.$$

26. $\dfrac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}$

Solución:

$$\frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{\dfrac{x^2+x-x+2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{\dfrac{x^2+2}{1}}{\dfrac{x^2+2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{(x+1)(x^2+2)}{(x^2+2)}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-(x+1)}=\frac{x-1}{x+2-x-1}=\frac{x-1}{1};$$

$$\therefore \quad \frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}=x-1.$$

Operaciones con fracciones

Simplificación de fracciones complejas

P r o c e d i m i e n t o

1. Se sustituye la letra por el valor asignado, sea numérico o literal
2. Se reduce todo a una sola fracción simple
3. El verdadero valor de la fracción se da teniendo en cuenta los siguientes principios:

$$\frac{0}{a} = 0, \qquad \frac{a}{0} = \infty, \qquad \frac{a}{\infty} = 0, \qquad \frac{0}{0}: \text{ valor indeterminado}$$

Nota: cuando al sustituir la letra por el valor asignado nos da 0/0, es posible, después de factorizar la expresión, eliminar los factores que producen la indeterminación; al hacer ahora la sustitución nos da un valor numérico real.

Hallar el verdadero valor de:

1. $\dfrac{x-2}{x+3}$ para $x = 2$.

Solución:

$$\frac{x-2}{x+3} = \frac{2-2}{2+3} \qquad \{\text{sustituyendo la } x \text{ por } 2\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x+3} = \frac{0}{5} \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x-2}{x+3} = 0 \qquad \{\text{aplicando el principio } 0/a = 0\}.$$

2. $\dfrac{x-2}{x-3}$ para $x = 3$.

Solución:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{3-2}{3-3} \qquad \{\text{sustituyendo la } x \text{ por } 3\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x-3} = \frac{1}{0} \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x-2}{x-3} = \infty \qquad \{\text{aplicando el principio } a/0 = \infty\}.$$

3. $\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$ para $x = a$.

Solución:

$$\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} = \frac{a^2-a^2}{a^2+a^2} \qquad \{\text{sustituyendo la } x \text{ por } a\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} = \frac{0}{2a^2} \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} = 0 \qquad \{\text{aplicando el principio } 0/a = 0\}.$$

4. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ para $x = y$.

Solución:

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{y^2+y^2}{y^2-y^2} \qquad \{\text{sustituyendo la } x \text{ por } y\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{2y^2}{0} \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \infty \qquad \{\text{aplicando el principio } a/0 = \infty\}.$$

5. $\dfrac{\frac{x-1}{3}}{x-2}$ para $x = 2$.

Solución:

$$\frac{\frac{x-1}{3}}{x-2} = \frac{\frac{2-1}{3}}{2-2} \qquad \{\text{sustituyendo la } x \text{ por } 2\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{x-1}{3}}{x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{0} \qquad \{\text{reduciendo}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{2-1}{3}}{2-2} = \frac{0\times 1}{3} = \frac{0}{3};$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{x-1}{3}}{x-2} = 0 \qquad \{\text{aplicando el principio } 0/a = 0\}.$$

6. $\dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}$ para $x = 3$

Solución:

$$\frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{3^2-9}{3^2+3-12} = \frac{9-9}{9+3-12} = \frac{0}{0} \qquad \{\text{sustituyendo la } x \text{ por } 3\}$$

No obstante:

$$\frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+4)(x-3)} = \frac{x+3}{x+4} \qquad \{\text{factorizando y simplificando}\}$$

Ahora, sustituyendo la x por 3, se obtiene:

$$\frac{3+3}{3+4} = \frac{6}{7};$$

Por lo tanto, el verdadero valor numérico de $\dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}$ para $x = 3$ es $\dfrac{6}{7}$.

7. $\dfrac{a^2-a-6}{a^2+2a-15}$ para $a = 3$

Solución:

$$\frac{a^2-a-6}{a^2+2a-15} = \frac{3^2-3-6}{3^2+2(3)-15} = \frac{0}{0} \qquad \{\text{sustituyendo la } a \text{ por } 3\}$$

No obstante:

$$\frac{a^2-a-6}{a^2+2a-15} = \frac{(a-3)(a+2)}{(a+5)(a-3)} = \frac{a+2}{a+5} \qquad \{\text{factorizando y simplificando}\}$$

Ahora, sustituyendo la a por 3, se obtiene:

$$\frac{3+2}{3+5} = \frac{5}{8};$$

Por lo tanto, el verdadero valor numérico de $\dfrac{a^2-a-6}{a^2+2a-15}$ para $a = 3$ es $\dfrac{5}{8}$.

140

Miscelánea sobre fracciones

Simplificar:

1. $\dfrac{12x^2+31x+20}{18x^2+21x-4}$

Solución:

$$\frac{12x^2+31x+20}{18x^2+21x-4}=\frac{(4x+5)(3x+4)}{(3x+4)(6x-1)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\therefore \quad \frac{12x^2+31x+20}{18x^2+21x-4}=\frac{(4x+5)\cancel{(3x+4)}}{\cancel{(3x+4)}(6x-1)}=\frac{4x+5}{6x-1} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

Descomponer las expresiones siguientes en la suma o resta de tres fracciones simples irreductibles:

8. $\dfrac{4x^2-5xy+y^2}{3x}$

Solución:

$$\frac{4x^2-5xy+y^2}{3x}=\frac{4x^2}{3x}-\frac{5xy}{3x}+\frac{y^2}{3x} \qquad \{\text{separando términos}\};$$

$$\therefore \quad \frac{4x^2-5xy+y^2}{3x}=\frac{4x}{3}-\frac{5y}{3}+\frac{y^2}{3x} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

11. Probar que $x^2-2x+1-\dfrac{9x-3x^2}{x-3}=\dfrac{x^3-1}{x-1}$

Solución:

$$x^2-2x+1-\frac{9x-3x^2}{x-3}=\frac{x^3-1}{x-1} \Leftrightarrow x^2-2x+1-\frac{-3x(x-3)}{(x-3)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x+1-\frac{9x-3x^2}{x-3}=\frac{x^3-1}{x-1} \Leftrightarrow x^2-2x+1+3x=x^2+x+1 \qquad \{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore \quad x^2-2x+1-\frac{9x-3x^2}{x-3}=\frac{x^3-1}{x-1} \Leftrightarrow x^2+x+1=x^2+x+1 \qquad \{\text{reduciendo}\}.$$

12. Probar que $\dfrac{a^4-5a^2+4}{a^3+a^2-4a-4}=a-3+\dfrac{2+4a}{2a+1}$

Solución:

$$\frac{a^4-5a^2+4}{a^3+a^2-4a-4}=a-3+\frac{2+4a}{2a+1}\Leftrightarrow\frac{(a-2)(a+2)(a-1)(a+1)}{(a-2)(a+2)(a+1)}=a-3+\frac{2(2a+1)}{(2a+1)}\qquad\{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad\frac{a^4-5a^2+4}{a^3+a^2-4a-4}=a-3+\frac{2+4a}{2a+1}\Leftrightarrow(a-1)=a-3+2\qquad\{\text{simplificando}\};$$

$$\therefore\quad\frac{a^4-5a^2+4}{a^3+a^2-4a-4}=a-3+\frac{2+4a}{2a+1}\Leftrightarrow a-1=a-1\qquad\{\text{reduciendo}\}.$$

Simplificar:

13. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2-ab+b^2}$

Solución:

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2-ab+b^2}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a-b)(a^2-ab+b^2)+2a(a-b)(a+b)}{(a-b)(a^3+b^3)},$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2-ab+b^2}=\frac{a^3+b^3+a^3-2a^2b+2ab^2-b^3+2a^3-2ab^2}{(a-b)(a^3+b^3)}\qquad\{\text{destruyendo paréntesis}\};$$

$$\therefore\quad\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2-ab+b^2}=\frac{4a^3-2a^2b}{(a-b)(a^3+b^3)}\qquad\{\text{reduciendo}\}.$$

14. $\left(\dfrac{a^2}{1-a^2}-\dfrac{a^4}{1-a^4}\right)\times\left(1-a+\dfrac{1+a^3}{a^2}\right)$

Solución:

$$\left(\frac{a^2}{1-a^2}-\frac{a^4}{1-a^4}\right)\times\left(1-a+\frac{1+a^3}{a^2}\right)=\left(\frac{a^2(1+a^2)-a^4}{1-a^4}\right)\times\left(\frac{a^2(1-a)+1+a^3}{a^2}\right)\qquad\{\text{sumando}\},$$

$$\Rightarrow\quad\left(\frac{a^2}{1-a^2}-\frac{a^4}{1-a^4}\right)\times\left(1-a+\frac{1+a^3}{a^2}\right)=\left(\frac{a^2(1+a^2-a^2)}{1-a^4}\right)\times\left(\frac{a^2-a^3+1+a^3}{a^2}\right),$$

$$\Rightarrow\quad\left(\frac{a^2}{1-a^2}-\frac{a^4}{1-a^4}\right)\times\left(1-a+\frac{1+a^3}{a^2}\right)=\left(\frac{a^2}{1-a^4}\right)\times\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right),$$

$$\Rightarrow\quad\left(\frac{a^2}{1-a^2}-\frac{a^4}{1-a^4}\right)\times\left(1-a+\frac{1+a^3}{a^2}\right)=\frac{a^2(a^2+1)}{a^2(1-a^2)(1+a^2)},$$

$$\Rightarrow\quad\left(\frac{a^2}{1-a^2}-\frac{a^4}{1-a^4}\right)\times\left(1-a+\frac{1+a^3}{a^2}\right)=\frac{\cancel{a^2}\,\cancel{(a^2+1)}}{\cancel{a^2}(1-a^2)\cancel{(a^2+1)}}=\frac{1}{1-a^2}.$$

15. $\left(\dfrac{x^2-9}{x^2-x-12}\div\dfrac{x-3}{x^2+3x}\right)\times\dfrac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3}\times\left(\dfrac{2}{a^2x}+\dfrac{1}{a^2x^2}\right)$

Solución:

$$\left(\frac{x^2-9}{x^2-x-12}\div\frac{x-3}{x^2+3x}\right)\times\frac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3}\times\left(\frac{2}{a^2x}+\frac{1}{a^2x^2}\right)=\left(\frac{(x-3)(x+3)}{(x-4)(x+3)}\times\frac{x(x+3)}{(x-3)}\right)\times\frac{a^2(x-4)(x+4)}{(x+3)(2x+1)}\times\left(\frac{2x+1}{a^2x^2}\right),$$

$$\Rightarrow\quad\left(\frac{x^2-9}{x^2-x-12}\div\frac{x-3}{x^2+3x}\right)\times\frac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3}\times\left(\frac{2}{a^2x}+\frac{1}{a^2x^2}\right)=\frac{a^2x(x-3)(x+3)^2(x-4)(x+4)(2x+1)}{a^2x^2(x-4)(x+3)^2(x-3)(2x+1)};$$

$$\therefore\quad\left(\frac{x^2-9}{x^2-x-12}\div\frac{x-3}{x^2+3x}\right)\times\frac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3}\times\left(\frac{2}{a^2x}+\frac{1}{a^2x^2}\right)=\frac{\cancel{a^2}\,\cancel{x}\,\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x+3)^2}\,\cancel{(x-4)}\,(x+4)\,\cancel{(2x+1)}}{\cancel{a^2}\,x^{\cancel{2}}\,\cancel{(x-4)}\,\cancel{(x+3)^2}\,\cancel{(x-3)}\,\cancel{(2x+1)}}=\frac{x+4}{x}.$$

16. $\dfrac{3x^3-x^2-12x+4}{6x^4+x^3-25x^2-4x+4}$

Solución:

$$\frac{3x^3-x^2-12x+4}{6x^4+x^3-25x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x+2)(3x-1)}{(x-2)(x+2)(2x+1)(3x-1)};$$

$$\therefore\quad\frac{3x^3-x^2-12x+4}{6x^4+x^3-25x^2-4x+4}=\frac{\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x+2)}\,\cancel{(3x-1)}}{\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x+2)}\,(2x+1)\,\cancel{(3x-1)}}=\frac{1}{2x+1}.$$

Ecuaciones fraccionarias de primer grado

Resolución de ecuaciones fraccionarias con denominadores monomios

P r o c e d i m i e n t o

1. Se eliminan los denominadores multiplicando cada término de la ecuación por el m.c.d. (mínimo común denominador)
2. Se efectúa una transposición de términos; los que contienen la "*x*" se escriben en el miembro izquierdo, y los otros términos se escriben en el miembro derecho
3. Se despeja la *x*: reduciendo y dividiendo cada miembro por el coeficiente de *x*

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$

<u>Solución</u>:

El mínimo común denominador, m.c.d., es 6.

$$\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x \Leftrightarrow 6\left(\frac{x}{6}\right)+6(5)=6\left(\frac{1}{3}\right)-6x \qquad \{\text{multiplicando cada término de la ecuación por 6}\},$$

$\Rightarrow \quad x+30=2-6x \qquad$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow \quad x+6x=2-30 \qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 7x=-28 \qquad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=-4 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 7}.

2. $\frac{3x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{5}=0$

<u>Solución</u>:

El mínimo común denominador, m.c.d., es 15.

$$\frac{3x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{5}=0 \Leftrightarrow 15\left(\frac{3x}{5}\right)-15\left(\frac{2x}{3}\right)+15\left(\frac{1}{5}\right)=0 \qquad \{\text{multiplicando cada término de la ecuación por 15}\},$$

$\Rightarrow \quad 9x-10x+3=0 \qquad$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow \quad -x+3=0 \qquad$ {reduciendo los términos semejantes},

$\Rightarrow \quad -x=-3 \qquad$ {transponiendo};

$\therefore \quad x=3 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -1}.

3. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=\frac{1}{5}$

<u>Solución</u>:

El mínimo común denominador, m.c.d., es $20x$.

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 20x\left(\frac{1}{2x}\right)+20x\left(\frac{1}{4}\right)-20x\left(\frac{1}{10x}\right)=20x\left(\frac{1}{5}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por $20x$},

$\Rightarrow \quad 10+5x-2=4x \qquad$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow \quad 5x+8=4x \qquad$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad 5x-4x=-8 \qquad$ {transponiendo};

$\therefore \quad x=-8 \qquad$ {reduciendo}.

4. $\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4}$

Solución:

El mínimo común denominador, m.c.d., es 12.

$$\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4} \Leftrightarrow 12\left(\frac{x}{2}\right)+12(2)-12\left(\frac{x}{12}\right)=12\left(\frac{x}{6}\right)-12\left(\frac{5}{4}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por 12},

$\Rightarrow$ $6x+24-x=2x-15$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $5x+24=2x-15$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $5x-2x=-15-24$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $3x=-39$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=-13$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3}.

5. $\frac{3x}{4}-\frac{1}{5}+2x=\frac{5}{4}-\frac{3x}{20}$

Solución:

El mínimo común denominador, m.c.d., es 20.

$$\frac{3x}{4}-\frac{1}{5}+2x=\frac{5}{4}-\frac{3x}{20} \Leftrightarrow 20\left(\frac{3x}{4}\right)-20\left(\frac{1}{5}\right)+20(2x)=20\left(\frac{5}{4}\right)-20\left(\frac{3x}{20}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por 20},

$\Rightarrow$ $15x-4+40x=25-3x$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $55x-4=25-3x$ {reduciendo términos semejantes},

$\Rightarrow$ $55x+3x=25+4$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $58x=29$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\frac{29}{58}=\frac{1}{2}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 58 y simplificando}.

6. $\frac{2}{3x}-\frac{5}{x}=\frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1$

Solución:

El mínimo común denominador, m.c.d., es $30x$.

$$\frac{2}{3x}-\frac{5}{x}=\frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1 \Leftrightarrow 30x\left(\frac{2}{3x}\right)-30x\left(\frac{5}{x}\right)=30x\left(\frac{7}{10}\right)-30x\left(\frac{3}{2x}\right)+30x(1)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por $30x$},

$\Rightarrow$ $20-150=21x-45+30x$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $-130=51x-45$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $-51x=-45+130$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $-51x=85$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\frac{85}{-51}=-\frac{5}{3}$ {dividiendo ambos miembros por -51, y simplificando}.

21. $\dfrac{7x-1}{3}-\dfrac{5-2x}{2x}=\dfrac{4x-3}{4}+\dfrac{1+4x^2}{3x}$

<u>Solución</u>:

El mínimo común denominador, m.c.d., es $12x$.

$$\frac{7x-1}{3}-\frac{5-2x}{2x}=\frac{4x-3}{4}+\frac{1+4x^2}{3x} \Leftrightarrow 12x\left(\frac{7x-1}{3}\right)-12x\left(\frac{5-2x}{2x}\right)=12x\left(\frac{4x-3}{4}\right)+12x\left(\frac{1+4x^2}{3x}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por $12x$},

$\Rightarrow \quad 4x(7x-1)-6(5-2x)=3x(4x-3)+4(1+4x^2)$ {simplificando},

$\Rightarrow \quad 28x^2-4x-30+12x=12x^2-9x+4+16x^2$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow \quad 28x^2+8x-30=28x^2-9x+4$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad 28x^2+8x-28x^2+9x=4+30$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 17x=34$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=2$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 17}.

22. $\dfrac{2x+7}{3}-\dfrac{2(x^2-4)}{5x}-\dfrac{4x^2-6}{15x}=\dfrac{7x^2+6}{3x^2}$

<u>Solución</u>:

El mínimo común denominador, m.c.d., es $15x^2$.

$$\frac{2x+7}{3}-\frac{2(x^2-4)}{5x}-\frac{4x^2-6}{15x}=\frac{7x^2+6}{3x^2} \Leftrightarrow 15x^2\left(\frac{2x+7}{3}\right)-15x^2\left(\frac{2(x^2-4)}{5x}\right)-15x^2\left(\frac{4x^2-6}{15x}\right)=15x^2\left(\frac{7x^2+6}{3x^2}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por $15x^2$},

$\Rightarrow \quad 5x^2(2x+7)-3x(2(x^2-4))-x(4x^2-6)=5(7x^2+6)$ {simplificando},

$\Rightarrow \quad 10x^3+35x^2-6x^3+24x-4x^3+6x=35x^2+30$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow \quad 35x^2+30x=35x^2+30$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad 35x^2+30x-35x^2=30$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 30x=30$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=1$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 30}.

28. $\frac{5x}{4}-\frac{3}{17}(x-20)-(2x-1)=\frac{x+24}{34}$

<u>Solución</u>:

El mínimo común denominador, m.c.d., es 68.

$$\frac{5x}{4}-\frac{3}{17}(x-20)-(2x-1)=\frac{x+24}{34} \Leftrightarrow 68\left(\frac{5x}{4}\right)-68\left(\frac{3}{17}\right)(x-20)-68(2x-1)=68\left(\frac{x+24}{34}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por 68},

$\Rightarrow$ $85x-12x+240-136x+68=2x+48$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $-63x+308=2x+48$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $-63x-2x=48-308$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $-65x=-260$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=4$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -65}.

29. $5+\frac{x}{4}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\left(10-\frac{5x}{3}\right)$

<u>Solución</u>:

$$5+\frac{x}{4}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\left(10-\frac{5x}{3}\right) \Leftrightarrow 5+\frac{x}{4}=\cancel{\frac{2}{3}}-\frac{x}{6}-\cancel{\frac{2}{3}}+\frac{5}{2}-\frac{5x}{12}$$ {destruyendo paréntesis}

El mínimo común denominador, m.c.d., es 24.

$$5+\frac{x}{4}=\frac{2}{3}-\frac{x}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-\frac{5x}{8} \Leftrightarrow 24(5)+24\left(\frac{x}{4}\right)=-24\left(\frac{x}{6}\right)+24\left(\frac{5}{2}\right)-24\left(\frac{5x}{12}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por 24},

$\Rightarrow$ $120+6x=-4x+60-10x$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $120+6x=-14x+60$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $6x+14x=60-120$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $20x=-60$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=-3$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 20}.

30. $\frac{5(x+2)}{12}+\frac{4}{9}-\frac{22-x}{36}=3x-20-\frac{8-x}{12}-\frac{20-3x}{18}$

<u>Solución</u>:

El mínimo común denominador, m.c.d., es 36.

$$\frac{5(x+2)}{12}+\frac{4}{9}-\frac{22-x}{36}=3x-20-\frac{8-x}{12}-\frac{20-3x}{18} \Leftrightarrow$$

$$36\left(\frac{5(x+2)}{12}\right)+36\left(\frac{4}{9}\right)-36\left(\frac{22-x}{36}\right)=36(3x)-36(20)-36\left(\frac{8-x}{12}\right)-36\left(\frac{20-3x}{18}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por 36},

$\Rightarrow$ $15x+30+16-22+x=108x-720-24+3x-40+6x$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $16x+24=117x-784$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $16x-117x=-784-24$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $-101x=-808$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=8$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -101}.

31. $\left(3-\frac{x}{2}\right)-\left(1-\frac{x}{3}\right)=7-\left(x-\frac{x}{2}\right)$

Solución:

$$\left(3-\frac{x}{2}\right)-\left(1-\frac{x}{3}\right)=7-\left(x-\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow 3-\frac{x}{2}-1+\frac{x}{3}=7-x+\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2-\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7-x+\frac{x}{2}$$

{destruyendo paréntesis}

El mínimo común denominador, m.c.d., es 6.

$$3-\frac{x}{2}-1+\frac{x}{3}=7-x+\frac{x}{2} \Leftrightarrow 6(2)-6\left(\frac{x}{2}\right)+6\left(\frac{x}{3}\right)=6(7)-6x+6\left(\frac{x}{2}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por 6},

$\Rightarrow$ $12-3x+2x=42-6x+3x$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $-x+12=-3x+42$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $-x+3x=42-12$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $2x=30$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=15$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2}.

32. $(x+3)(x-3)-x^2-\frac{5}{4}=\left(x-\frac{x}{5}\right)-\left(3x-\frac{3}{4}\right)$

Solución:

$$(x+3)(x-3)-x^2-\frac{5}{4}=\left(x-\frac{x}{5}\right)-\left(3x-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow x^2-9-x^2-\frac{5}{4}=x-\frac{x}{5}-3x+\frac{3}{4} \Leftrightarrow -9-\frac{5}{4}=-2x-\frac{x}{5}+\frac{3}{4}$$

{destruyendo paréntesis}.

El mínimo común denominador, m.c.d., es 20.

$$-9-\frac{5}{4}=-2x-\frac{x}{5}+\frac{3}{4} \Leftrightarrow -20(9)-20\left(\frac{5}{4}\right)=-20(2)x-20\left(\frac{x}{5}\right)+20\left(\frac{3}{4}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por 20},

$\Rightarrow$ $-180-25=-40x-4x+15$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $-205=-44x+15$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $44x=15+205$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $44x=220$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=5$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 44}.

33. $2x-\left(2x-\frac{3x-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right)-\frac{1}{4}$

Solución:

$$2x-\left(2x-\frac{3x-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right)-\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x-2x+\frac{3x-1}{8}=\frac{x+2}{9}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{8}=\frac{x+2}{9}-\frac{1}{4}$$

El mínimo común denominador, m.c.d., es 72.

$$\frac{3x-1}{8}=\frac{x+2}{9}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow 72\left(\frac{3x-1}{8}\right)=72\left(\frac{x+2}{9}\right)-72\left(\frac{1}{4}\right)$$

{multiplicando cada término de la ecuación por 72},

$\Rightarrow$ $27x-9=8x+16-18$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $27x-9=8x-2$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $27x-8x=-2+9$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $19x=7$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\frac{7}{19}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 19}.