Ecuaciones fraccionarias de primer grado

Resolución de ecuaciones fraccionarias de primer grado con denominadores compuestos

P r o c e d i m i e n t o

Lo primero que debemos lograr es convertir las ecuaciones fraccionarias en sus equivalentes enteras, luego resolver la ecuación entera. Para lo cual procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos el M.C.D (mínimo común múltiplo de los denominadores). Si es preciso, se factorizan los denominadores.

2. Multiplicamos cada miembro de la igualdad por el M.C.D

3. Se simplifican cada uno de los términos, obteniendo de esta manera una ecuación entera, y equivalente a la primitiva

4. Los términos que tienen la incógnita x se escriben en el miembro izquierdo de la ecuación y, los términos independientes, en el derecho y, teniendo presente que
cuando pasamos un término de un miembro a otro lo hacemos con signo cambiado

5. Se reducen los términos semejantes

6. Se simplifica

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{2x-1}=0$

<u>Solución</u>:

Los denominadores son 5 y $(2x-1)$;

$\therefore$ El M.C.D. es $5(2x-1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$5(2x-1)\times\frac{3}{5}+5(2x-1)\times\frac{3}{(2x-1)}=5(2x-1)\times 0,$$

$\Rightarrow$ $(2x-1)\times 3+5\times 3=0$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $6x-3+15=0$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $6x+12=0$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $6x=-12$ {restando 12 en ambos miembros de la igualdad};

$\therefore$ $x=-2$ {dividiendo ambos miembros de la igualdad por 6}.

2. $\dfrac{2}{4x-1}=\dfrac{3}{4x+1}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores son $(4x-1)$ y $(4x+1)$;

$\therefore$ El M.C.D. es $(4x-1)(4x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$(4x-1)(4x+1)\frac{2}{(4x-1)}=(4x-1)(4x+1)\frac{3}{(4x+1)},$$

$\Rightarrow$ $(4x+1)\times 2=(4x-1)\times 3$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $8x+2=12x-3$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow$ $8x-12x=-3-2$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $-4x=-5$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\dfrac{5}{4}$ {dividiendo ambos miembros de la igualdad por -4}.

3. $\dfrac{5}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores son $x^2-1=(x-1)(x+1)$ y $x-1$;

$\therefore$ El M.C.D. es $(x-1)(x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$(x-1)(x+1)\frac{5}{(x-1)(x+1)}=(x-1)(x+1)\frac{1}{(x-1)},$$

$\Rightarrow$ $5=x+1$ {simplificando};

$\therefore$ $x=4$ {restando 1 en ambos miembros de la ecuación}.

4. $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{x^2-1} = 0$

Solución :

Los denominadores son $x+1$ y $x^2-1 = (x-1)(x+1)$;

$\therefore$ El M.C.D. es $(x-1)(x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$(x-1)(x+1)\frac{3}{(x+1)} - (x-1)(x+1)\frac{1}{(x-1)(x+1)} = 0,$$

$\Rightarrow$ $(x-1)\times 3 - 1 = 0$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $3x - 3 - 1 = 0$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $3x - 4 = 0$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $3x = 4$ {sumando 4 en ambos miembros};

$\therefore$ $x = \dfrac{4}{3}$ {dividiendo por 3 en ambos miembros}.

5. $\dfrac{5x+8}{3x+4} = \dfrac{5x+2}{3x-4}$

Solución :

Los denominadores son $3x+4$ y $3x-4$;

$\therefore$ El M.C.D. es $(3x+4)(3x-4)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$(3x+4)(3x-4)\frac{5x+8}{(3x+4)} = (3x+4)(3x-4)\frac{5x+2}{(3x-4)},$$

$\Rightarrow$ $(3x-4)(5x+8) = (3x+4)(5x+2)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $15x^2 + 4x - 32 = 15x^2 + 26x + 8$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $15x^2 + 4x - 15x^2 - 26x = 8 + 32$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $-22x = 40$ {reduciendo};

$\therefore$ $x = -\dfrac{20}{11}$ {dividiendo por -22 en ambos miembros y simplificando}.

6. $\dfrac{10x^2 - 5x + 8}{5x^2 + 9x - 19} = 2$

Solución :

$$\frac{10x^2 - 5x + 8}{5x^2 + 9x - 19} = 2,$$

$\Rightarrow$ $10x^2 - 5x + 8 = 2(5x^2 + 9x - 19)$ {multiplicando ambos miembros de la ecuación por $5x^2 + 9x - 19$},

$\Rightarrow$ $10x^2 - 5x + 8 = 10x^2 + 18x - 38$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $10x^2 - 5x - 10x^2 - 18x = -38 - 8$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $-23x = -46$ {reduciendo};

$\therefore$ $x = 2$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -23}.

7. $\dfrac{1}{3x-3}+\dfrac{1}{4x+4}=\dfrac{1}{12x-12}$

<u>Solución</u> :

Los denominadores, factorizados, son $3(x-1)$, $4(x+1)$ y $12(x-1)$;

$\therefore$ El M.C.D. es $12(x-1)(x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$12(x-1)(x+1)\frac{1}{3(x-1)}+12(x-1)(x+1)\frac{1}{4(x+1)}=12(x-1)(x+1)\frac{1}{12(x-1)},$$

$\Rightarrow$ $4(x+1)+3(x-1)=x+1$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $4x+4+3x-3=x+1$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $7x+1=x+1$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $7x-x=1-1$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $6x=0$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=0$ {dividiendo por 6 ambos miembros}.

8. $\dfrac{x}{4}-\dfrac{x^2-8x}{4x-5}=\dfrac{7}{4}$

<u>Solución</u> :

Los denominadores son 4 y $4x-5$;

$\therefore$ El M.C.D. es $4(4x-5)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$4(4x-5)\frac{x}{4}-4(4x-5)\frac{x^2-8x}{(4x-5)}=4(4x-5)\frac{7}{4},$$

$\Rightarrow$ $(4x-5)x-4(x^2-8x)=(4x-5)7$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $4x^2-5x-4x^2+32x=28x-35$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $27x=28x-35$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $27x-28x=-35$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $-x=-35$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=35$ {multiplicando por -1 ambos miembros}.

9. $\dfrac{2x-9}{10}+\dfrac{2x-3}{2x-1}=\dfrac{x}{5}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores son $10,\ 2x-1\ y\ 5$;

$\therefore$ El M.C.D. es $10(2x-1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$10(2x-1)\frac{2x-9}{10}+10(2x-1)\frac{2x-3}{2x-1}=10(2x-1)\frac{x}{5},$$

$\Rightarrow$ $(2x-1)(2x-9)+10(2x-3)=2x(2x-1)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $4x^2-20x+9+20x-30=4x^2-2x$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $4x^2-21=4x^2-2x$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $4x^2-4x^2+2x=21$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $2x=21$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\dfrac{21}{2}\Leftrightarrow 10\tfrac{1}{2}$ {dividiendo por 2 ambos miembros}.

10. $\dfrac{(3x-1)^2}{x-1}=\dfrac{18x-1}{2}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores son $x-1\ y\ 2$;

$\therefore$ El M.C.D. es $2(x-1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$2(x-1)\frac{(3x-1)^2}{(x-1)}=2(x-1)\frac{18x-1}{2},$$

$\Rightarrow$ $2(3x-1)^2=(x-1)(18x-1)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $18x^2-12x+2=18x^2-19x+1$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $18x^2-12x-18x^2+19x=1-2$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $7x=-1$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=-\dfrac{1}{7}$ {dividiendo por 7 ambos miembros}.

11. $\dfrac{2x+7}{5x+2}-\dfrac{2x-1}{5x-4}=0$

Solución :

Los denominadores son $(5x+2)$ y $(5x-4)$;

$\therefore$ El M.C.D. es $(5x+2)(5x-4)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$(5x+2)(5x-4)\frac{2x+7}{(5x+2)}-(5x+2)(5x-4)\frac{2x-1}{(5x-4)}=(5x+2)(5x-4)\times 0,$$

$\Rightarrow$ $(5x-4)(2x+7)-(5x+2)(2x-1)=0$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $10x^2+27x-28-10x^2+x+2=0$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $28x-26=0$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $28x=26$ {sumando 26 en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore$ $x=\dfrac{13}{14}$ {dividiendo por 28 ambos miembros y reduciendo}.

12. $\dfrac{(5x-2)(7x+3)}{7x(5x-1)}-1=0$

Solución :

Multiplicamos cada término de la ecuación por $7x(5x-1)$:

$$7x(5x-1)\frac{(5x-2)(7x+3)}{7x(5x-1)}-7x(5x-1)\times 1=7x(5x-1)\times 0,$$

$\Rightarrow$ $(5x-2)(7x+3)-7x(5x-1)=0$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $35x^2+x-6-35x^2+7x=0$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $8x-6=0$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $8x=6$ {sumando 6 en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore$ $x=\dfrac{3}{4}$ {dividiendo por 8 ambos miembros y reduciendo}.

13. $\frac{3}{x-4} = \frac{2}{x-3} + \frac{8}{x^2-7x+12}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorizados, son $x-4$, $x-3$ y $(x-4)(x-3)$;

$\therefore$ El M.C.D. es $(x-4)(x-3)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por este M.C.D:

$$(x-4)(x-3)\frac{3}{(x-4)} = (x-4)(x-3)\frac{2}{(x-3)} + (x-4)(x-3)\frac{8}{(x-4)(x-3)},$$

$\Rightarrow$ $3(x-3) = 2(x-4)+8$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $3x-9 = 2x-8+8$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $3x-9 = 2x$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $3x-2x = 9$ {transponiendo};

$\therefore$ $x = 9$ {reduciendo}.

14. $\frac{6x-1}{18} - \frac{3(x+2)}{5x-6} = \frac{1+3x}{9}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores son 18, $5x-6$ y 9;

$\therefore$ el M.C.D. es $18(5x-6)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$18(5x-6)\ \frac{6x-1}{18} - 18(5x-6)\frac{3(x+2)}{5x-6} = 18(5x-6)\frac{1+3x}{9},$$

$\Rightarrow$ $(5x-6)(6x-1) - 18\times 3(x+2) = 2(5x-6)(1+3x)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $30x^2 - 41x + 6 - 54x - 108 = 30x^2 - 26x - 12$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $30x^2 - 95x - 102 = 30x^2 - 26x - 12$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $30x^2 - 95x - 30x^2 + 26x = -12 + 102$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $-69x = 90$ {reduciendo};

$\therefore$ $x = -\frac{30}{23}$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por -69, y simplificando}.

15. $\frac{5}{1+x}-\frac{3}{1-x}-\frac{6}{1-x^2}=0$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorizados, son $1+x$, $1-x$ y $(1+x)(1-x)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(1+x)(1-x)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(1+x)(1-x)\frac{5}{(1+x)}-(1+x)(1-x)\frac{3}{(1-x)}-(1+x)(1-x)\frac{6}{(1+x)(1-x)}=(1+x)(1-x)\times 0,$$

$\Rightarrow\quad 5(1-x)-3(1+x)-6=0$ {simplificando},

$\Rightarrow\quad 5-5x-3-3x-6=0$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow\quad -8x-4=0$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad -8x=4$ {sumando 4 en ambos miembros de la igualdad};

$\therefore\quad x=-\frac{1}{2}$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por -8, y simplificando}.

16. $\frac{1+2x}{1+3x}-\frac{1-2x}{1-3x}=-\frac{3x-14}{1-9x^2}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorizados, son $1+3x$, $1-3x$ y $(1+3x)(1-3x)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(1+3x)(1-3x)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(1+3x)(1-3x)\frac{1+2x}{(1+3x)}-(1+3x)(1-3x)\frac{1-2x}{(1-3x)}=-(1+3x)(1-3x)\frac{3x-14}{(1+3x)(1-3x)},$$

$\Rightarrow\quad (1-3x)(1+2x)-(1+3x)(1-2x)=-(3x-14)$ {simplificando},

$\Rightarrow\quad 1-x-6x^2-1-x+6x^2=-3x+14$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow\quad -2x=-3x+14$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad -2x+3x=14$ {transponiendo};

$\therefore\quad x=14$ {reduciendo}.

17. $\dfrac{3x-1}{x^2+7x+12}=\dfrac{1}{2x+6}+\dfrac{7}{6x+24}$

<u>Solución</u> :

Los denominadores, factorizados, son $(x+4)(x+3)$, $2(x+3)$ y $6(x+4)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $6(x+4)(x+3)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$6(x+4)(x+3)\frac{3x-1}{(x+4)(x+3)}=6(x+4)(x+3)\frac{1}{2(x+3)}+6(x+4)(x+3)\frac{7}{6(x+4)},$$

$\Rightarrow$ $6(3x-1)=3(x+4)+7(x+3)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $18x-6=3x+12+7x+21$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $18x-6=10x+33$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $18x-10x=33+6$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $8x=39$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\dfrac{39}{8}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 8}.

18. $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{3}{2x-2}=-\dfrac{3}{2x+2}$

<u>Solución</u> :

Los denominadores, factorizados, son $(x-1)^2$, $2(x-1)$ y $2(x+1)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $2(x+1)(x-1)^2$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$2(x+1)(x-1)^2\frac{1}{(x-1)^2}-2(x+1)(x-1)^2\frac{3}{2(x-1)}=-2(x+1)(x-1)^2\frac{3}{2(x+1)},$$

$\Rightarrow$ $2(x+1)-3(x+1)(x-1)=-3(x-1)^2$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $2x+2-3x^2+3=-3x^2+6x-3$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $-3x^2+2x+5=-3x^2+6x-3$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $-3x^2+2x+3x^2-6x=-3-5$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $-4x=-8$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=2$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -4}.

19. $\dfrac{5x+13}{15}-\dfrac{4x+5}{5x-15}=\dfrac{x}{3}$

<u>Solución</u> :

Los denominadores, factorizados, son $15,\ 5(x-3)$ y 3;

$\therefore$ el M.C.D. es $15(x-3)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$15(x-3)\frac{5x+13}{15}-15(x-3)\frac{4x+5}{5(x-3)}=15(x-3)\frac{x}{3},$$

$\Rightarrow\quad (x-3)(5x+13)-3(4x+5)=5x(x-3)$ {simplificando},

$\Rightarrow\quad 5x^2-2x-39-12x-15=5x^2-15x$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow\quad 5x^2-14x-54=5x^2-15x$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad 5x^2-14x-5x^2+15x=54$ {transponiendo};

$\therefore\quad x=54$ {reduciendo}.

20. $\dfrac{2x-1}{2x+1}-\dfrac{x-4}{3x-2}=\dfrac{2}{3}$

<u>Solución</u> :

Los denominadores son $(2x+1),\ (3x-2)$ y 3;

$\therefore$ el M.C.D. es $3(2x+1)(3x-2)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$3(2x+1)(3x-2)\frac{2x-1}{(2x+1)}-3(2x+1)(3x-2)\frac{x-4}{(3x-2)}=3(2x+1)(3x-2)\frac{2}{3},$$

$\Rightarrow\quad 3(3x-2)(2x-1)-3(2x+1)(x-4)=2(2x+1)(3x-2)$ {simplificando},

$\Rightarrow\quad 18x^2-21x+6-6x^2+21x+12=12x^2-2x-4$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow\quad 12x^2+18=12x^2-2x-4$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad 12x^2-12x^2+2x=-4-18$ {transponiendo};

$\Rightarrow\quad 2x=-22$ {reduciendo};

$\therefore\quad x=-11$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2}.

21. $\dfrac{4x+3}{2x-5}-\dfrac{3x+8}{3x-7}=1$

<u>Solución</u>:

Los denominadores son $(2x-5)$ y $(3x-7)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(2x-5)(3x-7)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(2x-5)(3x-7)\frac{4x+3}{(2x-5)}-(2x-5)(3x-7)\frac{3x+8}{(3x-7)}=(2x-5)(3x-7)\times 1,$$

$\Rightarrow\quad (3x-7)(4x+3)-(2x-5)(3x+8)=(2x-5)(3x-7)\qquad$ {simplificando},

$\Rightarrow\quad 12x^2-19x-21-6x^2-x+40=6x^2-29x+35\qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow\quad 6x^2-20x+19=6x^2-29x+35\qquad$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad 6x^2-20x-6x^2+29x=35-19\qquad$ {transponiendo};

$\Rightarrow\quad 9x=16\qquad$ {reduciendo};

$\therefore\quad x=\dfrac{16}{9}\qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 9}.

22. $\dfrac{10x-7}{15x+3}=\dfrac{3x+8}{12}-\dfrac{5x^2-4}{20x+4}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorizados, son $3(5x+1)$, 12 y $4(5x+1)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $12(5x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$12(5x+1)\frac{10x-7}{3(5x+1)}=12(5x+1)\frac{3x+8}{12}-12(5x+1)\frac{5x^2-4}{4(5x+1)},$$

$\Rightarrow\quad 4(10x-7)=(5x+1)(3x+8)-3(5x^2-4)\qquad$ {simplificando},

$\Rightarrow\quad 40x-28=15x^2+43x+8-15x^2+12\qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow\quad 40x-28=43x+20\qquad$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad 40x-43x=20+28\qquad$ {transponiendo};

$\Rightarrow\quad -3x=48\qquad$ {reduciendo};

$\therefore\quad x=-16\qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -3}.

23. $\dfrac{4x-1}{5}+\dfrac{x-2}{2x-7}=\dfrac{8x-3}{10}-1\dfrac{3}{10}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{4x-1}{5}+\frac{x-2}{2x-7}=\frac{8x-3}{10}-1\frac{3}{10}\Leftrightarrow\frac{4x-1}{5}+\frac{x-2}{2x-7}=\frac{8x-3}{10}-\frac{13}{10}$$

Los denominadores son 5, $2x-7$ y 10;

$\therefore$ el M.C.D. es $10(2x-7)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$10(2x-7)\frac{4x-1}{5}+10(2x-7)\frac{x-2}{(2x-7)}=10(2x-7)\frac{8x-3}{10}-10(2x-7)\frac{13}{10},$$

$\Rightarrow$ $2(2x-7)(4x-1)+10(x-2)=(2x-7)(8x-3)-13(2x-7)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $16x^2-60x+14+10x-20=16x^2-62x+21-26x+91$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $16x^2-50x-6=16x^2-88x+112$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $16x^2-50x-16x^2+88x=112+6$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $38x=118$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\dfrac{59}{19}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 38 y simplificando}.

24. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{2x-2}-\dfrac{2\frac{1}{3}}{2x-4}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{3}{2x-2}-\frac{2\frac{1}{3}}{2x-4}\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{3}{2x-2}-\frac{7}{3(2x-4)}$$

Los denominadores, factorados, son $x-1$, $x-2$, $2(x-1)$ y $6(x-2)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $6(x-1)(x-2)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$6(x-1)(x-2)\frac{1}{(x-1)}-6(x-1)(x-2)\frac{2}{(x-2)}=6(x-1)(x-2)\frac{3}{2(x-1)}-6(x-1)(x-2)\frac{7}{6(x-2)},$$

$\Rightarrow$ $6(x-2)-12(x-1)=9(x-2)-7(x-1)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $6x-12-12x+12=9x-18-7x+7$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $-6x=2x-11$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $-6x-2x=-11$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $-8x=-11$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\dfrac{11}{8}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -8 y simplificando}.

25. $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{5x-20}=\dfrac{1\frac{1}{2}}{3x-12}-\dfrac{2}{x+3}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{1}{x+3}-\frac{2}{5x-20}=\frac{1\frac{1}{2}}{3x-12}-\frac{2}{x+3}\Leftrightarrow\frac{1}{x+3}-\frac{2}{5x-20}=\frac{3}{2(3x-12)}-\frac{2}{x+3}$$

Los denominadores, factorados, son $x+3,\ 5(x-4),\ 6(x-4)$ y $(x+3)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $30(x-4)(x+3)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$30(x-4)(x+3)\frac{1}{(x+3)}-30(x-4)(x+3)\frac{2}{5(x-4)}=30(x-4)(x+3)\frac{3}{6(x-4)}-30(x-4)(x+3)\frac{2}{(x+3)},$$

$\Rightarrow$ $30(x-4)-12(x+3)=15(x+3)-60(x-4)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $30x-120-12x-36=15x+45-60x+240$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $18x-156=-45x+285$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $18x+45x=285+156$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $63x=441$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=7$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 63}.

26. $\dfrac{1}{6-2x}-\dfrac{4}{5-5x}=\dfrac{10}{12-4x}-\dfrac{3}{10-10x}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorados, son $2(3-x),\ 5(1-x),\ 4(3-x)$ y $10(1-x)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $20(1-x)(3-x)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$20(1-x)(3-x)\frac{1}{2(3-x)}-20(1-x)(3-x)\frac{4}{5(1-x)}=20(1-x)(3-x)\frac{10}{4(3-x)}-20(1-x)(3-x)\frac{3}{10(1-x)},$$

$\Rightarrow$ $10(1-x)-16(3-x)=50(1-x)-6(3-x)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $10-10x-48+16x=50-50x-18+6x$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $6x-38=-44x+32$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $6x+44x=32+38$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $50x=70$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\dfrac{7}{5}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 50 y simplificando}.

27. $\frac{2}{3} - \frac{6x^2}{9x^2 - 1} = \frac{2}{3x-1}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorados, son 3, $(3x-1)(3x+1)$, $(3x-1)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $3(3x-1)(3x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$3(3x-1)(3x+1)\frac{2}{3} - 3(3x-1)(3x+1)\frac{6x^2}{(3x-1)(3x+1)} = 3(3x-1)(3x+1)\frac{2}{(3x-1)},$$

$\Rightarrow$ $2(3x-1)(3x+1) - 18x^2 = 6(3x+1)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $18x^2 - 2 - 18x^2 = 18x + 6$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $-2 = 18x + 6$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $18x = -2 - 6$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $18x = -8$ {reduciendo};

$\therefore$ $x = -\frac{4}{9}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 18 y simplificando}.

28. $\frac{5x^2 - 27x}{5x+3} - \frac{1}{x} = x - 6$

<u>Solución</u>:

Los denominadores son $5x+3$ y x;

$\therefore$ el M.C.D. es $x(5x+3)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$x(5x+3)\frac{5x^2 - 27x}{(5x+3)} - x(5x+3)\frac{1}{x} = x(5x+3)(x-6),$$

$\Rightarrow$ $x(5x^2 - 27x) - (5x+3) = x(5x+3)(x-6)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $5x^3 - 27x^2 - 5x - 3 = 5x^3 - 27x^2 - 18x$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $5x^3 - 27x^2 - 5x - 5x^3 + 27x^2 + 18x = 3$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $13x = 3$ {reduciendo};

$\therefore$ $x = \frac{3}{13}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 13}.

29. $\dfrac{4x+1}{4x-1}-\dfrac{6}{16x^2-1}=\dfrac{4x-1}{4x+1}$

Solución:

Los denominadores, factorados, son $4x-1$, $(4x-1)(4x+1)$ y $4x+1$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(4x-1)(4x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(4x-1)(4x+1)\frac{4x+1}{(4x-1)}-(4x-1)(4x+1)\frac{6}{(4x-1)(4x+1)}=(4x-1)(4x+1)\frac{4x-1}{(4x+1)},$$

$\Rightarrow$ $(4x+1)(4x+1)-6=(4x-1)(4x-1)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $16x^2+8x+1-6=16x^2-8x+1$ {destruyendo paréntesis}

$\Rightarrow$ $16x^2+8x-5=16x^2-8x+1$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $16x^2+8x-16x^2+8x=1+5$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $16x=6$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\dfrac{3}{8}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 16 y simplificando}.

30. $3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+2\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)=\dfrac{5x(x-1)}{x^2-3x-4}$

Solución:

Los denominadores, factorados, son $x+1$, $x-4$ y $(x-4)(x+1)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(x-4)(x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$3(x-4)(x+1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2(x-4)(x+1)\left(\frac{x+1}{x-4}\right)=(x-4)(x+1)\frac{5x(x-1)}{(x-4)(x+1)},$$

$\Rightarrow$ $3(x-4)(x-1)+2(x+1)(x+1)=5x(x-1)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $3x^2-15x+12+2x^2+4x+2=5x^2-5x$ {destruyendo paréntesis}

$\Rightarrow$ $5x^2-11x+14=5x^2-5x$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $5x^2-11x-5x^2+5x=-14$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $-6x=-14$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=\dfrac{7}{3}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -6 y simplificando}.

31. $2\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)-3\left(\dfrac{x-2}{2x+3}\right)=\dfrac{x^2+78}{2x^2-x-6}$

Solución:

Los denominadores, factorados, son $x-2$, $2x+3$ y $(x-2)(2x+3)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(x-2)(2x+3)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$2(x-2)(2x+3)\left(\frac{x+2}{x-2}\right)-3(x-2)(2x+3)\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)=(x-2)(2x+3)\frac{x^2+78}{(x-2)(2x+3)},$$

$\Rightarrow$ $2(2x+3)(x+2)-3(x-2)(x-2)=x^2+78$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $4x^2+14x+12-3x^2+12x-12=x^2+78$ {destruyendo paréntesis}

$\Rightarrow$ $x^2+26x=x^2+78$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $x^2-x^2+26x=78$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $26x=78$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=3$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 26 y simplificando}.

32. $\dfrac{1}{x^2+3x-28}-\dfrac{1}{x^2+12x+35}=\dfrac{3}{x^2+x-20}$

Solución:

Los denominadores, factorados, son $(x+7)(x-4)$, $(x+7)(x+5)$ y $(x+5)(x-4)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(x+7)(x+5)(x-4)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$\frac{(x+7)(x+5)(x-4)}{(x+7)(x-4)}-\frac{(x+7)(x+5)(x-4)}{(x+7)(x+5)}=\frac{3(x+7)(x+5)(x-4)}{(x+5)(x-4)},$$

$\Rightarrow$ $x+5-(x-4)=3(x+7)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $x+5-x+4=3x+21$ {destruyendo paréntesis}

$\Rightarrow$ $9=3x+21$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $-3x=21-9$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $-3x=12$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=-4$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -3}.

33. $\dfrac{x-2}{x^2+8x+7}=\dfrac{2x-5}{x^2-49}-\dfrac{x-2}{x^2-6x-7}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorados, son $(x+7)(x+1)$, $(x+7)(x-7)$ y $(x-7)(x+1)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(x+7)(x-7)(x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(x+7)(x-7)(x+1)\frac{x-2}{(x+7)(x+1)}=(x+7)(x-7)(x+1)\frac{2x-5}{(x+7)(x-7)}-(x+7)(x-7)(x+1)\frac{x-2}{(x-7)(x+1)},$$

$\Rightarrow$ $(x-7)(x-2)=(x+1)(2x-5)-(x+7)(x-2)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $x^2-9x+14=2x^2-3x-5-x^2-5x+14$ {destruyendo paréntesis}

$\Rightarrow$ $x^2-9x+14=x^2-8x+9$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $x^2-9x-x^2+8x=9-14$ {transponiendo};

$\Rightarrow$ $-x=-5$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=5$ {multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1}.

34. $\dfrac{4x+5}{15x^2+7x-2}-\dfrac{2x+3}{12x^2-7x-10}-\dfrac{2x-5}{20x^2-29x+5}=0$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorados, son $(3x+2)(5x-1)$, $(4x-5)(3x+2)$ y $(4x-5)(5x-1)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(3x+2)(5x-1)(4x-5)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(3x+2)(5x-1)(4x-5)\frac{4x+5}{(3x+2)(5x-1)}-(3x+2)(5x-1)(4x-5)\frac{2x+3}{(4x-5)(3x+2)}-(3x+2)(5x-1)(4x-5)\frac{2x-5}{(4x-5)(5x-1)}=0,$$

$\Rightarrow$ $(4x-5)(4x+5)-(5x-1)(2x+3)-(3x+2)(2x-5)=0$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $16x^2-25-10x^2-13x+3-6x^2+11x+10=0$ {destruyendo paréntesis}

$\Rightarrow$ $-2x-12=0$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $-2x=12$ {transponiendo};

$\therefore$ $x=-6$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -2}.

35. $\dfrac{7}{2x+1}-\dfrac{3}{x+4}=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3(x+1)}{2x^2+9x+4}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorados, son $(2x+1)$, $(x+4)$, $(x+1)$ y $(x+4)(2x+1)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(2x+1)(x+4)(x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(2x+1)(x+4)(x+1)\frac{7}{(2x+1)}-(2x+1)(x+4)(x+1)\frac{3}{(x+4)}=(2x+1)(x+4)(x+1)\frac{2}{(x+1)}-(2x+1)(x+4)(x+1)\frac{3(x+1)}{(x+4)(2x+1)},$$

$\Rightarrow$ $7(x+4)(x+1)-3(2x+1)(x+1)=2(2x+1)(x+4)-3(x+1)^2$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $7x^2+35x+28-6x^2-9x-3=4x^2+18x+8-3x^2-6x-3$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $x^2+26x+25=x^2+12x+5$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $x^2+26x-x^2-12x=5-25$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $14x=-20$ {reduciendo},

$\therefore$ $x=-\dfrac{10}{7}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 14 y simplificando}.

36. $\dfrac{(x+3)^2}{(x-3)^2}=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{2(7x+1)}{x^2-2x-3}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorados, son $(x-3)^2$, $(x+1)$ y $(x-3)(x+1)$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(x-3)^2(x+1)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(x-3)^2(x+1)\frac{(x+3)^2}{(x-3)^2}=(x-3)^2(x+1)\frac{x-1}{(x+1)}+(x-3)^2(x+1)\frac{2(7x+1)}{(x-3)(x+1)},$$

$\Rightarrow$ $(x+1)(x+3)^2=(x-3)^2(x-1)+2(x-3)(7x+1)$ {simplificando},

$\Rightarrow$ $x^3+7x^2+15x+9=x^3-7x^2+15x-9+14x^2-40x-6$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $x^3+7x^2+15x+9=x^3+7x^2-25x-15$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $x^3+7x^2+15x-x^3-7x^2+25x=-15-9$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $40x=-24$ {reduciendo},

$\therefore$ $x=-\dfrac{3}{5}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 40 y simplificando}.

37. $\frac{x-4}{x+5}-\frac{x+1}{x-2}=-\frac{12(x+3)}{(x+5)^2}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores, factorados, son $x+5,\ x-2$ y $(x+5)^2$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(x+5)^2(x-2)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(x+5)^2(x-2)\frac{x-4}{(x+5)}-(x+5)^2(x-2)\frac{x+1}{(x-2)}=-(x+5)^2(x-2)\frac{12(x+3)}{(x+5)^2},$$

$\Rightarrow\quad (x+5)(x-2)(x-4)-(x+5)^2(x+1)=-12(x-2)(x+3)$ {simplificando},

$\Rightarrow\quad x^3-x^2-22x+40-x^3-11x^2-35x-25=-12x^2-12x+72$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow\quad -12x^2-57x+15=-12x^2-12x+72$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad -12x^2-57x+12x^2+12x=72-15$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad -45x=57$ {reduciendo},

$\therefore\quad x=-\frac{19}{15}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -45 y simplificando}.

38. $\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}$

<u>Solución</u>:

Los denominadores son $x-4,\ x-3,\ x+1$ y $x+2$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)\frac{x-3}{(x-4)}-(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)\frac{x-2}{(x-3)}=(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)\frac{x+2}{(x+1)}-(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)\frac{x+3}{(x+2)},$$

$\Rightarrow\quad (x-3)^2(x+1)(x+2)-(x-4)(x+1)(x+2)(x-2)=(x-4)(x-3)(x+2)^2-(x-4)(x-3)(x+1)(x+3)$ {simplificando},

$\Rightarrow\quad x^4-3x^3-7x^2+15x+18-x^4+3x^3+8x^2-12x-16=x^4-3x^3-12x^2+20x+48-x^4+3x^3+13x^2-27x-36$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow\quad x^2+3x+2=x^2-7x+12$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad x^2+3x-x^2+7x=12-2$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad 10x=10$ {reduciendo},

$\therefore\quad x=1$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 10}.

39. $\dfrac{x+6}{x+2}-\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{x-5}{x-1}-\dfrac{x}{x+4}$

Solución:

Los denominadores son $x+2,\ x-3,\ x-1$ y $x+4$;

$\therefore$ el M.C.D. es $(x+2)(x-3)(x-1)(x+4)$

Multiplicamos cada término de la ecuación por el M.C.D:

$$(x+2)(x-3)(x-1)(x+4)\frac{x+6}{(x+2)}-(x+2)(x-3)(x-1)(x+4)\frac{x+1}{(x-3)}=(x+2)(x-3)(x-1)(x+4)\frac{x-5}{(x-1)}-(x+2)(x-3)(x-1)(x+4)\frac{x}{(x+4)},$$

$\Rightarrow\ (x-3)(x-1)(x+4)(x+6)-(x+2)(x-1)(x+4)(x+1)=(x+2)(x-3)(x+4)(x-5)-(x+2)(x-3)(x-1)x$ {simplificando},

$\Rightarrow\ x^4+6x^3-13x^2-66x+72-x^4-6x^3-7x^2+6x+8=x^4-2x^3-25x^2+26x+120-x^4+2x^3+5x^2-6x$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow\ -20x^2-60x+80=-20x^2+20x$ {reduciendo},

$\Rightarrow\ -20x^2-60x-20x+20x^2=120-80$ {transponiendo},

$\Rightarrow\ -80x=40$ {reduciendo},

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{2}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -80 y simplificando}.

143

Ecuaciones literales de primer grado con una incógnita

Procedimiento

1. Se efectúan las operaciones indicadas
2. Se reducen los términos semejantes
3. Se efectúa una transposición de términos; los que contienen la "*x*" se escriben en el miembro izquierdo, y los otros términos se escriben en el miembro derecho
4. Se despeja la *x*: reduciendo y dividiendo cada miembro por el coeficiente de *x*

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $a(x+1)=1$

Solución:

$$a(x+1)=1 \Leftrightarrow ax+a=1,$$

$\Rightarrow \quad ax = 1-a \qquad$ {transponiendo};

$\therefore \quad x=\dfrac{1-a}{a} \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por a}.

2. $ax-4=bx-2$

Solución:

$$ax-4=bx-2 \Leftrightarrow ax-bx=-2+4 \qquad \text{\{transponiendo\}},$$

$\Rightarrow \quad x(a-b)=2 \qquad$ {reduciendo y factorizando};

$\therefore \quad x=\dfrac{2}{a-b} \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $a-b$}.

3. $ax+b^2=a^2-bx$

Solución:

$$ax+b^2=a^2-bx \Leftrightarrow ax+bx=a^2-b^2,$$

$\Rightarrow \quad x(a+b)=(a+b)(a-b) \Leftrightarrow x\cancel{(a+b)}=\cancel{(a+b)}(a-b) \qquad$ {transponiendo};

$\therefore \quad x=a-b \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(a+b)$}.

4. $3(2a - x) + ax = a^2 + 9$

Solución:

$3(2a - x) + ax = a^2 + 9 \Leftrightarrow 6a - 3x + ax = a^2 + 9$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $ax - 3x = a^2 - 6a + 9$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $x(a - 3) = (a - 3)^2$ {factorizando};

$\therefore$ $x = a - 3$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $a - 3$}.

5. $a(x + b) + x(b - a) = 2b(2a - x)$

Solución:

$a(x + b) + x(b - a) = 2b(2a - x) \Leftrightarrow \cancel{ax} + ab + bx - \cancel{ax} = 4ab - 2bx$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $bx + 2bx = 4ab - ab$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $3bx = 3ab$;

$\therefore$ $x = a$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $3b$}.

6. $(x - a)^2 - (x + a)^2 = a(a - 7x)$

Solución:

$(x - a)^2 - (x + a)^2 = a(a - 7x) \Leftrightarrow [x - a + x + a][x - a - x - a] = a(a - 7x)$

{factorizando la diferencia de cuadrados},

$\Rightarrow$ $2x(-2a) = a(a - 7x) \Leftrightarrow -4\cancel{a}x = \cancel{a}(a - 7x) \Leftrightarrow -4x = a - 7x$,

$\Rightarrow$ $-4x + 7x = a$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $3x = a$ {reduciendo};

$\therefore$ $x = \dfrac{a}{3}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3}.

P r o c e d i m i e n t o

Nota: en estos ejercicios la incógnita es la letra x.

1. Se halla el mínimo común denominador (m.c.d.).
2. Se divide el m.c.d. por cada denominador, y el resultado se multiplica por el numerador respectivo (los pasos 1 y 2 nos permiten suprimir los deominadores).
3. Se hace la transposición de términos de tal modo que las equis queden el miembro izquierdo de la ecuación y los demás términos en el lado derecho
4. Se reducen los términos semejantes.
5. Se despeja completamente la incógnita *x* (dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la equis, incluyendo el signo).

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{m}{x} - \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$

Solución :

El m.c.d. es mx. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{m}{x} - \frac{1}{m} = \frac{2}{m},$$

$\Rightarrow \quad m \times m - x \times 1 = x \times 2,$

$\Rightarrow \quad m^2 - x = 2x \qquad$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow \quad -x - 2x = -m^2 \qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -3x = -m^2 \qquad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = \frac{m^2}{3} \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -3}.

2. $\frac{a}{x}+\frac{b}{2}=\frac{4a}{x}$

Solución:

El m.c.d. es $2x$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{2}=\frac{4a}{x},$$

$\Rightarrow \quad 2\times a+x\times b=2\times 4a,$

$\Rightarrow \quad 2a+bx=8a \qquad$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow \quad bx=8a-2a \qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad bx=6a \qquad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=\frac{6a}{b} \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por b}.

3. $\frac{x}{2a}-\frac{1-x}{a^2}=\frac{1}{2a}$

Solución:

El m.c.d. es $2a^2$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{x}{2a}-\frac{1-x}{a^2}=\frac{1}{2a},$$

$\Rightarrow \quad a\times x-2(1-x)=a\times 1,$

$\Rightarrow \quad ax-2+2x=a \qquad$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow \quad (a+2)x=a+2 \qquad$ {sacando factor común y transponiendo};

$\therefore \quad x=1 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(a+2)$}.

4. $\frac{m}{x}+\frac{n}{m}=\frac{n}{x}+1$

Solución:

El m.c.d. es mx. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{m}{x}+\frac{n}{m}=\frac{n}{x}+1,$$

$\Rightarrow \quad m\times m+x\times n=m\times n+mx\times 1,$

$\Rightarrow \quad m^2+nx=mn+mx \qquad$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow \quad nx-mx=mn-m^2 \qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad (n-m)x=m(n-m) \qquad$ {sacando factor común};

$\therefore \quad x=m \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(n-m)$}.

5. $\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3a-2}{x}$

Solución:

El m.c.d. es $2ax$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{a-1}{a}+\frac{1}{2}=\frac{3a-2}{x},$$

$\Rightarrow\quad 2x(a-1)+ax\times 1=2a(3a-2),$

$\Rightarrow\quad 2ax-2x+ax=6a^2-4a$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow\quad 3ax-2x=6a^2-4a$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad (3a-2)x=2a(3a-2)$ {sacando factor común};

$\therefore\quad x=2a$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(3a-2)$, $a\neq 2/3$}.

6. $\dfrac{a-x}{a}-\dfrac{b-x}{b}=\dfrac{2(a-b)}{ab}$

Solución:

El m.c.d. es ab. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{a-x}{a}-\frac{b-x}{b}=\frac{2(a-b)}{ab},$$

$\Rightarrow\quad b(a-x)-a(b-x)=1\times 2(a-b),$

$\Rightarrow\quad ab-bx-ab+ax=2a-2b$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow\quad ax-bx=2a-2b$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad (a-b)x=2(a-b)$ {sacando factor común};

$\therefore\quad x=2$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(a-b)$, $a\neq b$}.

7. $\dfrac{x-3a}{a^2}-\dfrac{2a-x}{ab}=-\dfrac{1}{a}$

Solución:

El m.c.d. es a^2b. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{x-3a}{a^2}-\frac{2a-x}{ab}=-\frac{1}{a},$$

$\Rightarrow\quad b(x-3a)-a(2a-x)=-ab\times 1,$

$\Rightarrow\quad bx-3ab-2a^2+ax=-ab$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow\quad ax+bx=-ab+3ab+2a^2$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad ax+bx=2a^2+2ab$ {reduciendo}

$\Rightarrow\quad (a+b)x=2a(a+b)$ {sacando factor común};

$\therefore\quad x=2a$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(a+b)$}.

8. $\frac{x+m}{m}-\frac{x+n}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}-2$

Solución:

El m.c.d. es mn. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{x+m}{m}-\frac{x+n}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}-2,$$

$\Rightarrow\quad n(x+m)-m(x+n)=m^2+n^2-mn\times 2,$

$\Rightarrow\quad nx+mn-mx-mn=m^2+n^2-2mn$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow\quad nx-mx=n^2-2mn+m^2$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad (n-m)x=(n-m)^2$ {factorizando};

$\therefore\quad x=n-m$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(n-m)$}.

9. $\frac{x-b}{a}=2-\frac{x-a}{b}$

Solución:

El m.c.d. es ab. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{x-b}{a}=2-\frac{x-a}{b},$$

$\Rightarrow\quad b(x-b)=ab\times 2-a(x-a),$

$\Rightarrow\quad bx-b^2=2ab-ax+a^2$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow\quad ax+bx=a^2+2ab+b^2$ {transponiendo}

$\Rightarrow\quad (a+b)x=(a+b)^2$ {factorizando};

$\therefore\quad x=a+b$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(a+b)$}.

10. $\frac{4x}{2a+b}-3=-\frac{3}{2}$

Solución:

El m.c.d. es $2(2a+b)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{4x}{2a+b}-3=-\frac{3}{2},$$

$\Rightarrow\quad 2\times 4x-2(2a+b)\times 3=-(2a+b)\times 3,$

$\Rightarrow\quad 8x-12a-6b=-6a-3b$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow\quad 8x=-6a-3b+12a+6b$ {transponiendo}

$\Rightarrow\quad 8x=6a+3b$ {reduciendo};

$\therefore\quad x=\frac{6a+3b}{8}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 8}.

11. $\dfrac{2a+3x}{x+a}=\dfrac{2(6x-a)}{4x+a}$

Solución:

El m.c.d. es $(x+a)(4x+a)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{2a+3x}{x+a}=\frac{2(6x-a)}{4x+a},$$

$\Rightarrow \quad (4x+a)(2a+3x)=(x+a)\times 2(6x-a),$

$\Rightarrow \quad 11ax+12x^2+2a^2=10ax+12x^2-2a^2$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow \quad 11ax+12x^2-10ax-12x^2=-2a^2-2a^2$ {transponiendo}

$\Rightarrow \quad ax=-4a^2$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=-4a$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por a}.

12. $\dfrac{2(x-c)}{4x-b}=\dfrac{2x+c}{4(x-b)}$

Solución:

El m.c.d. es $4(4x-b)(x-b)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{2(x-c)}{4x-b}=\frac{2x+c}{4(x-b)},$$

$\Rightarrow \quad 4(x-b)\times 2(x-c)=(4x-b)\times(2x+c),$

$\Rightarrow \quad 8x^2-8cx-8bx+8bc=8x^2+4cx-2bx-bc$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow \quad 8x^2-8cx-8bx-8x^2-4cx+2bx=-bc-8bc$ {transponiendo}

$\Rightarrow \quad -6bx-12cx=-9bc$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad -6(b+2c)x=-9bc$ {factorizando};

$\therefore \quad x=\dfrac{3bc}{2(b+2c)}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $-6(b+2c)$}.

13. $\dfrac{1}{n}-\dfrac{m}{x}=\dfrac{1}{mn}-\dfrac{1}{x}$

Solución:

El m.c.d. es mnx. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{1}{n}-\frac{m}{x}=\frac{1}{mn}-\frac{1}{x},$$

$\Rightarrow \quad mx\times 1-mn\times m=x\times 1-mn\times 1,$

$\Rightarrow \quad mx-m^2n=x-mn$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow \quad mx-x=m^2n-mn$ {transponiendo}

$\Rightarrow \quad (m-1)x=(m-1)mn$ {factorizando},

$\therefore \quad x=mn$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(m-1)$}.

14. $\dfrac{(x-2b)(2x+a)}{(x-a)(a-2b+x)}=2$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es $(x-a)(a-2b+x)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$\dfrac{(x-2b)(2x+a)}{(x-a)(a-2b+x)}=2,$

$\Rightarrow\quad (x-2b)(2x+a)=(x-a)(a-2b+x)\times 2,$

$\Rightarrow\quad 2x^2+ax-4bx-2ab=-4bx+2x^2-2a^2+4ab$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow\quad 2x^2+ax-4bx+4bx-2x^2=-2a^2+4ab+2ab$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad ax=-2a^2+6ab$ {reduciendo}

$\Rightarrow\quad ax=a(-2a+6b)$ {factorizando};

$\therefore\quad x=-2a+6b$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por a}.

15. $\dfrac{x+m}{x-n}=\dfrac{n+x}{m+x}$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es $(x-n)(m+x)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$\dfrac{x+m}{x-n}=\dfrac{n+x}{m+x},$

$\Rightarrow\quad (x+m)(m+x)=(x-n)(n+x),$

$\Rightarrow\quad (x+m)(x+m)=(x-n)(x+n)$ {ordenando},

$\Rightarrow\quad x^2+2mx+m^2=x^2-n^2$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow\quad x^2+2mx-x^2=-n^2-m^2$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad 2mx=-(m^2+n^2)$ {reduciendo};

$\therefore\quad x=-\dfrac{m^2+n^2}{2m}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $2m$}.

16. $\dfrac{x(2x+3b)(x+b)}{x+3b}=2x^2-bx+b^2$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es $(x+3b)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$\dfrac{x(2x+3b)(x+b)}{x+3b}=2x^2-bx+b^2,$

$\Rightarrow\quad x(2x+3b)(x+b)=(x+3b)(2x^2-bx+b^2),$

$\Rightarrow\quad 2x^3+5bx^2+3b^2x=2x^3+5bx^2-2b^2x+3b^3$ {efectuando los profuctos indicados},

$\Rightarrow\quad 2x^3+5bx^2+3b^2x-2x^3-5bx^2+2b^2x=3b^3$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad 5b^2x=3b^3$ {reduciendo};

$\therefore\quad x=\dfrac{3b}{5}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $5b^2$}.

17. $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x}{b}+\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{b}-\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{5a+13b}{12a}$

<u>Solución</u> :

$$\frac{3}{4}\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{b}-\frac{x}{a}\right)+\frac{5a+13b}{12a}\Leftrightarrow\frac{3x}{4b}+\frac{3x}{4a}=\frac{x}{3b}-\frac{x}{3a}+\frac{5a+13b}{12a}\qquad\{\text{destruyendo paréntesis}\}$$

El m.c.d. es $12ab$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$9ax+9bx=4ax-4bx+b(5a+13b)$,

$\Rightarrow\quad 9ax+9bx=4ax-4bx+5ab+13b^2$ $\qquad\{$efectuando los productos indicados$\}$,

$\Rightarrow\quad 9ax+9bx-4ax+4bx=5ab+13b^2$ $\qquad\{$transponiendo$\}$,

$\Rightarrow\quad 5ax+13bx=5ab+13b^2$ $\qquad\{$reduciendo$\}$,

$\Rightarrow\quad (5a+13b)x=(5a+13b)b$ $\qquad\{$factorizando$\}$;

$\therefore\quad x=b$ $\qquad\{$dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(5a+13b)\}$.

18. $\dfrac{x+a}{3}=\dfrac{(x-b)^2}{3x-a}+\dfrac{3ab-3b^2}{9x-3a}$

<u>Solución</u> :

$$\frac{x+a}{3}=\frac{(x-b)^2}{3x-a}+\frac{3ab-3b^2}{9x-3a}\Leftrightarrow\frac{x+a}{3}=\frac{(x-b)^2}{3x-a}+\frac{3ab-3b^2}{3(3x-a)}\qquad\{\text{factorizando}\}$$

El m.c.d. es $3(3x-a)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$(3x-a)(x+a)=3(x-b)^2+3ab-3b^2$,

$\Rightarrow\quad 3x^2+2ax-a^2=3x^2-6bx+3b^2+3ab-3b^2$ $\qquad\{$efectuando los productos indicados$\}$,

$\Rightarrow\quad 3x^2+2ax-a^2=3x^2-6bx+3ab$ $\qquad\{$reduciendo$\}$

$\Rightarrow\quad 3x^2+2ax-3x^2+6bx=3ab+a^2$ $\qquad\{$transponiendo$\}$,

$\Rightarrow\quad 2ax+6bx=a^2+3ab$ $\qquad\{$reduciendo$\}$,

$\Rightarrow\quad 2(a+3b)x=a(a+3b)$ $\qquad\{$factorizando$\}$;

$\therefore\quad x=\dfrac{a}{2}$ $\qquad\{$dividiendo ambos miembros de la ecuación por $2(a+3b)\}$.

19. $\dfrac{5x+a}{3x+b}=\dfrac{5x-b}{3x-a}$

Solución:

El m.c.d. es $(3x+b)(3x-a)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$$\frac{5x+a}{3x+b}=\frac{5x-b}{3x-a},$$

$\Rightarrow\quad (3x-a)(5x+a)=(3x+b)(5x-b),$

$\Rightarrow\quad 15x^2-2ax-a^2=15x^2+2bx-b^2$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow\quad 15x^2-2ax-15x^2-2bx=a^2-b^2$ {transponiendo}

$\Rightarrow\quad -2ax-2bx=a^2-b^2$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad -2(a+b)x=(a-b)(a+b)$ {factorizando};

$\therefore\quad x=-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{b-a}{2}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $-2(a+b)$}.

20. $\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{a(2x+ab)}{x^2-a^2}$

Solución:

$$\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{a(2x+ab)}{x^2-a^2}\Leftrightarrow\frac{x+a}{(x-a)}-\frac{x-a}{(x+a)}=\frac{a(2x+ab)}{(x-a)(x+a)}$$ {factorizando los denominadores}

El m.c.d. es $(x-a)(x+a)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$\Rightarrow\quad (x+a)(x+a)-(x-a)(x-a)=a(2x+ab),$

$\Rightarrow\quad x^2+2ax+a^2-x^2+2ax-a^2=2ax+a^2b$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow\quad 4ax=2ax+a^2b$ {reduciendo}

$\Rightarrow\quad 4ax-2ax=a^2b$ {transponiendo}

$\Rightarrow\quad 2ax=a^2b$ {reduciendo};

$\therefore\quad x=\dfrac{ab}{2}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $2(a+3b)$}.

21. $\dfrac{2x-3a}{x+4a}-2=\dfrac{11a}{x^2-16a^2}$

Solución:

$$\frac{2x-3a}{x+4a}-2=\frac{11a}{x^2-16a^2}\Leftrightarrow\frac{2x-3a}{x+4a}-2=\frac{11a}{(x-4a)(x+4a)}$$ {factorizando los denominadores}

El m.c.d. es $(x-4a)(x+4a)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$\Rightarrow\quad (x-4a)(2x-3a)-(x-4a)(x+4a)\times 2=11a,$

$\Rightarrow\quad 2x^2-11ax+12a^2-2x^2+32a^2=11a$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow\quad -11ax+44a^2=11a$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad -11ax=11a-44a^2$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad -11ax=11a(1-4a)$ {factorizando};

$\therefore\quad x=4a-1$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $-11a$}.

22. $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{x^2}{a^2+ax}=\dfrac{x+a}{a}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{1}{x+a}+\frac{x^2}{a^2+ax}=\frac{x+a}{a}\Leftrightarrow\frac{1}{a+x}+\frac{x^2}{a(a+x)}=\frac{a+x}{a}\qquad\{\text{factorizando los denominadores, y ordenando}\}$$

El m.c.d. es $a(a+x)$. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$\Rightarrow\quad a\times 1+x^2=(a+x)(a+x),$

$\Rightarrow\quad a+x^2=a^2+2ax+x^2\qquad$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow\quad x^2-x^2-2ax=a^2-a\qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad -2ax=a^2-a\qquad$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad -2ax=a(a-1)\qquad$ {factorizando};

$\therefore\quad x=\dfrac{1-a}{2}\qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $-2a$}.

23. $\dfrac{2(a+x)}{b}-\dfrac{3(b+x)}{a}=\dfrac{6(a^2-2b^2)}{ab}$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es ab. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$\Rightarrow\quad 2a(a+x)-3b(b+x)=6(a^2-2b^2),$

$\Rightarrow\quad 2a^2+2ax-3b^2-3bx=6a^2-12b^2\qquad$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow\quad 2ax-3bx=6a^2-12b^2-2a^2+3b^2\qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad 2ax-3bx=4a^2-9b^2\qquad$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad (2a-3b)x=(2a-3b)(2a+3b)\qquad$ {factorizando};

$\therefore\quad x=2a+3b\qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $-2a$}.

24. $m(n-x)-(m-n)(m+x)=n^2-\dfrac{1}{n}(2mn^2-3m^2n)$

<u>Solución</u>:

El m.c.d. es n. Dividimos cada denominador por el m.c.d. y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo:

$\Rightarrow\quad mn(n-x)-n(m-n)(m+x)=n^3-(2mn^2-3m^2n),$

$\Rightarrow\quad mn^2-mnx-m^2n-mnx+mn^2+n^2x=n^3-2mn^2+3m^2n\qquad$ {efectuando los productos indicados},

$\Rightarrow\quad 2mn^2-2mnx-m^2n+n^2x=n^3-2mn^2+3m^2n\qquad$ {reduciendo},

$\Rightarrow\quad -2mnx+n^2x=n^3-2mn^2+3m^2n-2mn^2+m^2n\qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow\quad -2mnx+n^2x=n^3-4mn^2+4m^2n$

$\Rightarrow\quad n(n-2m)x=n(n-2m)^2\qquad$ {factorizando};

$\therefore\quad x=(n-2m)\qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $n(n-2m)$}.

Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado

1. Hallar el número que disminuido en sus $\frac{3}{8}$ equivale a su duplo disminuido en 11.

Solución:

Sea

x: número buscado

$\frac{3}{8}x$: tres octavos del número

$2x$: duplo del número

De tal manera que:

$$x-\frac{3}{8}x=2x-11,$$

$\Rightarrow \quad 8x-3x=16x-88$ {multiplicando cada término de la ecuación por 8},

$\Rightarrow \quad 5x=16x-88$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad 5x-16x=-88$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -11x=-88$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=8$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -11}.

Respuesta: el número buscado es el 8.

2. Hallar el número que aumentado en sus $\frac{5}{6}$ equivale a su triplo disminuido en 14.

Solución:

Sea

x: número buscado

$\frac{5}{6}x$: cinco sextos del número

$3x$: triplo del número

De tal manera que:

$$x+\frac{5}{6}x=3x-14,$$

$\Rightarrow \quad 6x+5x=18x-84$ {multiplicando cada término de la ecuación por 6},

$\Rightarrow \quad 11x=18x-84$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad 11x-18x=-84$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -7x=-84$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=12$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -7}.

Respuesta: el número buscado es el 12.

3. ¿Qué número hay que restar de 22 para que la diferencia equivalga a la mitad de 22 aumentada en los $\frac{6}{5}$ del número que se resta?

Solución:

Sea

x: número que hay que restar de 22

11: mitad de 22

$\frac{6}{5}x$: seis quintos del número que se resta de 22

De tal manera que:

$$22 - x = 11 + \frac{6}{5}x,$$

$\Rightarrow \quad 110 - 5x = 55 + 6x$ {multiplicando cada término de la ecuación por 5},

$\Rightarrow \quad -5x - 6x = 55 - 110$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -11x = -55$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 5$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -11}.

Respuesta: el número buscado es el 5.

4. ¿Cuál es e número que tiene 30 de diferencia entre sus $\frac{5}{4}$ y sus $\frac{7}{8}$?

Solución:

Sea

x: número que hay que restar de 22

$\frac{5}{4}x$: cinco cuartos del número

$\frac{7}{8}x$: siete octavos del número

De tal manera que:

$$\frac{5}{4}x - \frac{7}{8}x = 30,$$

$\Rightarrow \quad \frac{10x - 7x}{8} = 30,$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{8}x = 30$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 80$ {multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\frac{8}{3}$ y simplificando}.

Respuesta: el número buscado es el 80.

5. El exceso de un número sobre 17 equivale a la diferencia entre los $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{6}$ del número. Hallar el número.

<u>Solución</u>:

Sea

x: número buscado

$\frac{3}{5}x$: tres quintos del número

$\frac{1}{6}x$: un sexto del número

De tal manera que:

$x - 17 = \frac{3}{5}x - \frac{1}{6}x,$

$\Rightarrow \quad x - 17 = \frac{18x - 5x}{30},$

$\Rightarrow \quad x - 17 = \frac{13}{30}x \qquad \{\text{reduciendo}\},$

$\Rightarrow \quad 30x - 510 = 13x \qquad \{\text{multiplicando cada miembro de la ecuación por } 30\},$

$\Rightarrow \quad 30x - 13x = 510 \qquad \{\text{transponiendo}\},$

$\Rightarrow \quad 17x = 510 \qquad \{\text{reduciendo}\};$

$\therefore \quad x = 30 \qquad \{\text{dividiendo ambos miembros de la ecuación por } 17\}.$

Respuesta: el número buscado es el 30.

6. La suma de la quinta parte de un número con los $\frac{3}{8}$ del número excede en 49 al doble de la diferencia entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{12}$ del número. Hallar el número.

Solución :

Sea

x: número buscado

$\frac{1}{5}x$: quinta parte del número

$\frac{3}{8}x$: tres octavos del número

$\frac{1}{6}x$: un sexto del número

$\frac{1}{12}x$: un doceavo del número

De tal manera que:

$$\frac{1}{5}x+\frac{3}{8}x=2\left[\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}x\right]+49,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8x+15x}{40}=2\left[\frac{2x-x}{12}\right]+49,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{23}{40}x=2\left[\frac{x}{12}\right]+49 \qquad \{\text{reduciendo}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{23}{40}x=\frac{1}{6}x+49 \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

El M.C.D. (mínimo común denominador) entre 6 y 40 es 120; por lo tanto, para que desaparezcan los denominadores, debemos multiplicar cada término de la ecuación por 120:

$$69x=20x+5880,$$

$$\Rightarrow \quad 69x-20x=5880 \qquad \{\text{transponiendo}\},$$

$$\Rightarrow \quad 49x=5880 \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore \quad x=120 \qquad \{\text{dividiendo ambos miembros de la ecuación por } 49\}.$$

Respuesta: el número buscado es el 120.

7. La edad de B es los $\frac{3}{5}$ de la de A, y si ambas edades se suman, la suma excede en 4 años al doble de la edad de B. Hallar ambas edades.

<u>Solución</u>:

Sea

x: edad de A

$\frac{3}{5}x$: edad de B

$2\times\frac{3}{5}x = \frac{6}{5}x$: doble de la edad de B

De tal manera que:

$$x + \frac{3}{5}x = \frac{6}{5}x + 4,$$

$\Rightarrow \quad 5x + 3x = 6x + 20$ {multiplicando cada término de la ecuacón por 5},

$\Rightarrow \quad 5x + 3x - 6x = 20$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 2x = 20$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 10$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2}

Y $\quad \frac{3}{5}(10) = 6$

Respuesta: A tiene 10 años de edad y B 6 años.

8. B tiene los $\frac{7}{8}$ de lo que tiene A. Si A recibe \$90, entonces tiene el doble de lo que tiene B ahora. ¿Cuánto tiene cada uno?

<u>Solución</u>:

Sea

x: dinero que tiene A

$\frac{7}{8}x$: dinero que tiene B

$2\times\frac{7}{8}x = \frac{7}{4}x$: doble del dinero de B

De tal manera que:

$$x + 90 = \frac{7}{4}x,$$

$\Rightarrow \quad 4x + 360 = 7x$ {multiplicando cada término de la ecuacón por 4},

$\Rightarrow \quad 4x - 7x = -360$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -3x = -360$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 120$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por − 3}

Y $\quad \frac{7}{8}(120) = 105$

Respuesta: A tiene \$120 y B \$105.

9. Después de vender los $\frac{3}{5}$ de una pieza de tela quedan 40 m. ¿Cuál era la longitud de la pieza?

<u>Solución</u>:

Sea

x: longitud original de la pieza de tela, en m.

$\frac{3}{5}x$: tres quintos de la pieza de tela original

De tal manera que:

$$x - \frac{3}{5}x = 40,$$

$\Rightarrow \quad 5x - 3x = 200$ {multiplicando cada término de la ecuacón por 5},

$\Rightarrow \quad 2x = 200$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 100$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por − 3}

Respuesta: La pieza de tela tenía una longitud original de 100 m.

10. Después de gastar $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{8}$ de lo que tenía me quedan 39 bolívares. ¿Cuánto tenía?

<u>Solución</u>:

Sea

x: dinero que Ud. tenía, en bolívares.

$\frac{1}{3}x$: tercera parte de lo que Ud. tenía

$\frac{1}{8}x$: un octavo de lo que Ud. tenía

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{8}x = \frac{8x + 3x}{24} = \frac{11}{24}x$: total del dinero gastado por Ud.

De tal manera que:

$$x - \frac{11}{24}x = 39,$$

$\Rightarrow \quad 24x - 11x = 936$ {multiplicando cada término de la ecuacón por 24},

$\Rightarrow \quad 13x = 936$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 72$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 13}

Respuesta: Ud. tenía 72 bolívares.

11. El triplo de un número excede en 48 al tercio del mismo número. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: número buscado

$3x$: triplo del número

$\frac{1}{3}x$: un tercio del número

De tal manera que:

$3x = \frac{1}{3}x + 48,$

$\Rightarrow \quad 9x = x + 144$ {multiplicando cada término de la ecuacón por 3},

$\Rightarrow \quad 9x - x = 144$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 8x = 144$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 18$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 8}

Respuesta: el número buscado es el 18.

12. El cuadruplo de un número excede en 19 a la mitad del número aumentado en 30. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: número buscado

$4x$: cuadruplo del número

$\frac{1}{2}x + 30$: mitad del número aumentado en 30

De tal manera que:

$4x = \left(\frac{1}{2}x + 30\right) + 19,$

$\Rightarrow \quad 8x = x + 60 + 38$ {multiplicando cada término de la ecuacón por 2},

$\Rightarrow \quad 8x - x = 60 + 38$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 7x = 98$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 14$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 8}

Respuesta: el número buscado es el 14.

13. El exceso de 80 sobre la mitad de un número equivale al exceso del número sobre 10. Hallar el número.

<u>Solución</u>:

Sea

x: número buscado

$\frac{1}{2}x$: mitad del número

$80-\frac{1}{2}x$: exceso de 80 sobre la mitad del número

$x-10$: exceso del núkmero sobre 10

De tal manera que:

$x-10=80-\frac{1}{2}x,$

$\Rightarrow \quad 2x-20=160-x$ {multiplicando cada término de la ecuacón por 2},

$\Rightarrow \quad 2x+x=160+20$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 3x=180$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=60$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3}

Respuesta: el número buscado es el 60.

14. Hallar el número cuyos $\frac{7}{8}$ excedan a sus $\frac{4}{5}$ en 2.

<u>Solución</u>:

Sea

x: número buscado

$\frac{7}{8}x$: siete octavos del número

$\frac{4}{5}x$: cuatro quintos del número

De tal manera que:

$\frac{7}{8}x=\frac{4}{5}x+2,$

$\Rightarrow \quad 35x=32x+80$ {multiplicando cada término de la ecuacón por el M.C.D., 80},

$\Rightarrow \quad 35x-32x=80$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 3x=80$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=\frac{80}{3} \Leftrightarrow 26\frac{2}{3}$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3}

Respuesta: el número buscado es el $26\frac{2}{3}$.

15. El largo de un buque que es de 800 pies excede en 744 pies a los $\frac{8}{9}$ del ancho. Hallar el ancho.

<u>Solución</u>:

Sea

x: ancho del buque, en pies

$\frac{8}{9}x$: ocho novenos del ancho

800: largo del buque, en pies

De tal manera que:

$800 = \frac{8}{9}x + 744,$

$\Rightarrow \quad 7200 = 8x + 6696$ {multiplicando cada término de la ecuacón por el M.C.D., 80},

$\Rightarrow \quad -8x = 6696 - 7200$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -8x = -504$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 63$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -8}

Respuesta: el ancho del buque es de 63 pies.

146

Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado

1. Hallar dos números consecutivos tales que los $\frac{4}{5}$ del mayor equivalgan al menor dismiuido en 4.

<u>Solución</u>:

Sea

x: número mayor

$x-1$: número menor (son consecutivos)

De tal manera que:

$\frac{4}{5}x = (x-1) - 4,$

$\Rightarrow \quad 4x = 5(x-1) - 20$ {multiplicando cada término de la ecuación por 5},

$\Rightarrow \quad 4x = 5x - 5 - 20$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 4x - 5x = -5 - 20$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -x = -25$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 25$ {multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1}

y $\quad x - 1 = 24$

Resuesta: los números son 24 y 25.

2. Hallar dos números consecutivos tales que los $\frac{7}{8}$ del menor excedan en 17 a los $\frac{3}{5}$ del mayor.

<u>Solución</u> :

Sea

x : número mayor

$x-1$: número menor (son consecutivos)

Vamos a escribir en el miembro izquierdo de la ecuación los datos que nos dan del número mayor y en el derecho, los del menor; como los $\frac{7}{8}$ del menor *exceden* en 17 a los $\frac{3}{5}$ del mayor, hay que restar 17 unidades de la parte izquierda para igualar los miembros.

De tal manera que:

$$\frac{3}{5}x = \frac{7}{8}(x-1) - 17,$$

$\Rightarrow \quad 24x = 35(x-1) - 680$ {multiplicando cada término de la ecuación por 40, el m.c.d.},

$\Rightarrow \quad 24x = 35x - 35 - 680$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 24x - 35x = -35 - 680$ {transposición de términos},

$\Rightarrow \quad -11x = -715$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 65$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -11}

y $\quad x - 1 = 64$

Resuesta: los números son 64 y 55.

3. Hallar dos números consecutivos tales que el menor exceda en 81 a la diferencia entre los $\frac{3}{4}$ del menor y los $\frac{2}{5}$ del mayor.

<u>Solución</u> :

Sea

x : número mayor

$x-1$: número menor (son consecutivos)

De tal manera que:

$$x - 1 = \frac{3}{4}(x-1) - \frac{2}{5}x + 81,$$

$\Rightarrow \quad 20x - 20 = 15(x-1) - 8x + 1620$ {multiplicando cada término de la ecuación por 20, el m.c.d.},

$\Rightarrow \quad 20x - 20 = 15x - 15 - 8x + 1620$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 20x - 20 = 7x + 1605$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad 20x - 7x = 1605 + 20$ {transposición de términos},

$\Rightarrow \quad 13x = 1625$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 125$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 13}

y $\quad x - 1 = 124$

Resuesta: los números son 124 y 125.

1. La suma de dos números es 59, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 5. Hallar los números.

Solución:

Sea

x : número mayor

$59 - x$: número menor

De tal manera que:

$$\frac{x}{59 - x} = 2 + \frac{5}{59 - x},$$

$\Rightarrow \quad x = 2(59 - x) + 5 \qquad$ {multiplicando cada término de la ecuación por $(59 - x)$},

$\Rightarrow \quad x = 118 - 2x + 5 \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x = -2x + 123 \qquad$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad x + 2x = 123 \qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 3x = 123 \qquad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 41 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3}

y $\quad 59 - x = 59 - 41 = 18$

Respuesta: los números son 18 y 41.

2. La suma de dos números es 436, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 73. Hallar los números.

Solución:

Sea

x : número mayor

$436 - x$: número menor

De tal manera que:

$$\frac{x}{436 - x} = 2 + \frac{73}{436 - x},$$

$\Rightarrow \quad x = 2(436 - x) + 73 \qquad$ {multiplicando cada término de la ecuación por $(436 - x)$},

$\Rightarrow \quad x = 872 - 2x + 73 \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x = -2x + 945 \qquad$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad x + 2x = 945 \qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 3x = 945 \qquad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 315 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3}

y $\quad 436 - x = 436 - 315 = 121$

Respuesta: los números son 121 y 315.

3. La diferencia de dos números es 44, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 3 y el residuo 2. Hallar los números.

Solución:

Sea

x : número mayor: dividendo

$x - 44$: número menor: divisor

Como el residuo es 2, si restamos 2 al dividendo se tendrá una división exacta cuyo cociente es 3

De tal manera que:

$$\frac{x - 2}{x - 44} = 3,$$

$\Rightarrow \quad x - 2 = 3(x - 44) \qquad$ {multiplicando cada miembro de la ecuación por $(x - 44)$},

$\Rightarrow \quad x - 2 = 3x - 132 \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x - 3x = -132 + 2 \qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -2x = -130 \qquad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 65 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -2}

y $\quad x - 44 = 65 - 44 = 21$

Respuesta: los números son 21 y 65.

4. Un número excede a otro en 56. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es 3 y el residuo 8. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: número mayor: dividendo

$x-56$: número menor: divisor

Como el residuo es 8, si restamos 8 al dividendo se tendrá una división exacta cuyo cociente es 3

De tal manera que:

$$\frac{x-8}{x-56}=3,$$

$\Rightarrow \quad x-8=3(x-56) \quad$ {multiplicando cada miembro de la ecuación por $(x-56)$},

$\Rightarrow \quad x-8=3x-168 \quad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x-3x=-168+8 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -2x=-160 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=80 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -2}

y $\quad x-56=80-56=24$

Respuesta: los números son 24 y 80.

5. Dividir 260 en dos partes tales que el duplo de la mayor dividido entre el triplo de la menor dé 2 de cociente y 40 de residuo.

Solución:

Sea

x: parte mayor

$260-x$: parte menor

$2x$: duplo de la parte mayor: dividendo

$3(260-x)=780-3x$: triplo de la parte menor: divisor

Como el residuo es 40, si restamos 40 al dividendo se tendrá una división exacta cuyo cociente es 2.

De tal manera que:

$$\frac{2x-40}{780-3x}=2,$$

$\Rightarrow \quad 2x-40=2(780-3x) \quad$ {multiplicando cada miembro de la ecuación por $(780-3x)$},

$\Rightarrow \quad 2x-40=1560-6x \quad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 2x+6x=1560+40 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 8x=1600 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=200 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 8}

y $\quad 260-x=260-200=60$

Respuesta: las partes en que se ha de eividir 260 son 200 y 60.

6. Repartir 196 soles entre A y B de modo que si los 3/8 de la parte de A se dividen entre el quinto de la de B se obtiene 1 de cociente y 16 de residuo.

Solución:

Sea

x: dinero que le corresponde a A, en soles

$196 - x$: dinero que le corresponde a B, en soles

$\frac{3}{8}x$: $\frac{3}{8}$ de la parte de A: dividendo

$\frac{1}{5}(196 - x) = \frac{196}{5} - \frac{1}{5}x$: un quinto de la parte de B: divisor

Como el residuo es 16, si restamos 16 al dividendo se tendrá una división exacta cuyo cociente es 1.

De tal manera que:

$$\frac{\frac{3}{8}x - 16}{\frac{196}{5} - \frac{1}{5}x} = 1,$$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{8}x - 16 = \frac{196}{5} - \frac{1}{5}x \qquad$ {multiplicando cada miembro de la ecuación por $\frac{196}{5} - \frac{1}{5}x$},

$\Rightarrow \quad 15x - 640 = 1568 - 8x \qquad$ {multiplicando cada término de la ecuacón por 40},

$\Rightarrow \quad 15x + 8x = 1568 + 640 \qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 23x = 2208 \qquad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 96 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 23}

y $\quad 196 - x = 196 - 96 = 100$

Respuesta: a A le corresponden 96 soles y a B 100 soles.

1. En tres días un hombre ganó \$175. Si cada día ganó la mitad de lo que ganó el día anterior, ¿cuánto ganó cada día?

Solución:

Sea

x: dinero que ganó el primer día

$\frac{1}{2}x$: dinero que ganó el segundo día

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{4}x$: dinero que ganó el tercer día

De tal manera que:

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 175,$$

$\Rightarrow \quad 4x + 2x + x = 700$ {multiplicando cada término de la ecuación por 4, el m.c.d.},

$\Rightarrow \quad 7x = 700$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 100$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 7}.

$y \quad \frac{1}{2}x = \frac{100}{2} = 50$

$y \quad \frac{1}{4}x = \frac{100}{4} = 25$

Respuesta: el hombre ganó, el primer día \$100, el segundo día \$50, y el tercer día \$25.

2. El jueves perdí los $\frac{3}{5}$ de lo que perdí el miércoles y el viernes los $\frac{5}{6}$ de lo que perdí el jueves. Si en los tres días perdí \$252, ¿cuánto perdí cada día?

Solución:

Sea

x: dinero que perdió el miércoles

$\frac{3}{5}x$: dinero que perdió el jueves

$\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}x\right) = \frac{1}{2}x$: dinero que perdió el viernes

De tal manera que:

$$x + \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}x = 252,$$

$\Rightarrow \quad 10x + 6x + 5x = 2520$ {multiplicando cada término de la ecuación por 10, el m.c.d.},

$\Rightarrow \quad 21x = 2520$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 120$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 21}.

$y \quad \frac{3}{5}x = \frac{3}{5}(120) = 72$

$y \quad \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(120) = 60$

Respuesta: Ud. perdió, el miércoles \$120, el jueves \$72, y el viernes \$60.

3. B tiene 2/3 de la que tiene A y C 3/5 de lo que tiene B. Si entre los tres tienen 248 sucres, ¿cuánto tiene cada uno?

Solución:

Sea

x: dinero que tiene A, en sucres

$\frac{2}{3}x$: dinero que tiene B, en sucres

$\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{2}{5}x$: dinero que tiene C

De tal manera que:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{2}{5}x = 248,$$

$\Rightarrow \quad 15x + 10x + 6x = 3720 \quad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 15, el m.c.d.},

$\Rightarrow \quad 31x = 3720 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 120 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 31}.

$y \quad \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}(120) = 80$

$y \quad \frac{2}{5}x = \frac{2}{5}(120) = 48$

Respuesta: A tiene 120 sucres, B 80 sucres y C 48 sucres.

149

Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado

1. Tenía cierta suma de dinero. Gasté \$20 y presté los $\frac{2}{3}$ de lo que me quedaba. Si ahora tengo \$10, ¿cuánto tenía al principio?

Solución:

Sea

x: dinero que Ud tenía al principio

$x - 20$: dinero que le queda después de gastar los \$20

$\frac{2}{3}(x-20)$: dinero que Ud. presta

De tal manera que:

$$x - \left\{20 + \frac{2}{3}(x-20)\right\} = 10,$$

$\Rightarrow \quad x - 20 - \frac{2}{3}(x-20) = 10 \quad$ {destruyendo llaves},

$\Rightarrow \quad 3x - 60 - 2(x-20) = 30 \quad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 3},

$\Rightarrow \quad 3x - 60 - 2x + 40 = 30 \quad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x - 20 = 30 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 50 \quad$ {sumando 20 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: Ud. tenía al principio \$50.

2. Después de gastar la mitad de lo que tenía y de prestar la mitad de lo que me quedó, tengo 21 quetzales. Cuánto tenía al principio?

Solución:

Sea

x: dinero que Ud. tenía al principio, en quetzales

$\frac{x}{2}$: dinero que Ud. gastó

$x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$: dinero que a Ud. le queda después del primer gasto

$\frac{1}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{x}{4}$: dinero que Ud. presta

$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{2x + x}{4} = \frac{3x}{4}$: dinero total gastado por Ud., en quetzales

De tal manera que:

$$x - \frac{3x}{4} = 21,$$

$\Rightarrow \quad 4x - 3x = 84 \quad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 4};

$\therefore \quad x = 84 \quad$ {reduciendo}

Respuesta: Ud. tenía al principio 84 quetzales.

3. Tengo cierta suma de dinero. Si me pagan \$7 que me deben, puedo gastar los $\frac{4}{5}$ de mi nuevo capital y me quedaran \$20. ¿Cuánto tengo ahora?

Solución:

Sea

x: dinero que Ud. tiene ahora

$x + 7$: dinero que Ud. tendría si le pagaran \$7

$\frac{4}{5}(x + 7)$: dinero que Ud. gastaría si le pagaran \$7

$(x + 7) - \frac{4}{5}(x + 7)$: dinero que a Ud. le quedaría si, después de recibir \$7, presta los 4/5 de su nuevo capital

De tal manera que:

$$x + 7 - \frac{4}{5}(x + 7) = 20,$$

$\Rightarrow \quad 5x + 35 - 4(x + 7) = 100 \quad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 5},

$\Rightarrow \quad 5x + 35 - 4x - 28 = 100 \quad$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x + 7 = 100 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 93 \quad$ {restando 7 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: Ud. tiene ahora \$93.

1. La edad de A es $\frac{1}{3}$ de la de B y hace 15 años la edad de A era $\frac{1}{6}$ de la de B. Hallar las edades actuales.

Solución:

Sea

x: edad actual de B

$\frac{1}{3}x$: edad actual de A

$x-15$: edad de B, hace 15 años

$\frac{1}{3}x-15$: edad de A, hace 15 años

$\frac{1}{6}(x-15)$: edad de A, hace 15 años

De tal manera que:

$$\frac{1}{3}x-15=\frac{1}{6}(x-15),$$

$\Rightarrow \quad 2x-90=x-15$ {multiplicando cada término de la ecuación por 6},

$\Rightarrow \quad 2x-x=-15+90$ {transponiendo};

$\therefore \quad x=75$ {reduciendo}.

y $\quad \frac{1}{3}x=25$

Respuesta: actualmente, A tiene 25 años de edad y B 75.

2. La edad de A es el triplo de B y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.

Solución:

Sea

x: edad actual de B

$3x$: edad actual de A

$x+20$: edad de B, dentro de 20 años

$3x+20$: edad de A, dentro de 20 años

$2(x+20)=2x+40$: edad de A, dentro de 20 años

De tal manera que:

$$3x+20=2x+40,$$

$\Rightarrow \quad 3x-2x=40-20$ {transponiendo};

$\therefore \quad x=20$ {reduciendo};

y $\quad 3x=60$

Respuesta: actualmente, A tiene 60 años de edad y B 20.

3. La edad de A hace 5 años era los $\frac{9}{11}$ de la edad que tendrá dentro de 5 años. Hallar la edad actual de A.

Solución:

Sea

x: edad actual de A

$x-5$: edad de A, hace 5 años

$x+5$: edad de A, dentro de 5 años

$\frac{9}{11}(x+5)$: edad de A, hace 5 años

De tal manera que:

$$x-5=\frac{9}{11}(x+5),$$

$\Rightarrow \quad 11x-55=9(x+5)$ {multiplicando cada término por 11},

$\Rightarrow \quad 11x-55=9x+45$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 11x-9x=45+55$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 2x=100$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=50$ {dividiendo ambos miembros por 2}.

Respuesta: la edad actual de A es de 50 años.

6. Gasté los $\frac{4}{5}$ de lo que tenía; perdí los $\frac{2}{3}$ de lo que me quedó; se me perdieron 8 soles y me quedé sin nada. ¿Cuánto tenía al principio?

Solución:

Sea

x: dinero que Ud. tenía al principio, en soles

$\frac{4}{5}x$: dinero que Ud. gasta

$x-\frac{4}{5}x=\frac{5x-4x}{5}=\frac{1}{5}x$: dinero que le queda después del primer gasto

$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}x\right)=\frac{2}{15}x$: dinero que pierde

$\frac{1}{5}x-\frac{2}{15}x=\frac{3x-2x}{15}=\frac{1}{15}x$: dinero que a Ud. le queda después de la primera pérdida

De tal manera que:

$\frac{1}{15}x-8=0$ {depués de la última pérdida de 8 soles Ud. se queda sin nada},

$\Rightarrow \quad \frac{1}{15}x=8$ {sumando 8 en ambos miembros};

$\therefore \quad x=120$ {multiplicando ambos miembros de la ecuación por 15}

Respuesta: Ud. tenía al principio 120 soles.

1. A tiene doble dinero que B. Si A le diera a B 20 bolívares, tendría los $\frac{4}{5}$ de lo que tendría B. ¿Cuánto tiene cada uno?

Solución:

Sea:

x: dinero que tiene B, en bolívares

$2x$: dinero que tiene A, en bolívares

$2x - 20$: dinero que tendría A si le diera 20 bolívares a B

$x + 20$: dinero que tendría B si A le direa 20 bolívares

$\frac{4}{5}(x + 20)$: dinero que tendría A si le diera 20 bolívares a B

De tal manera que:

$$2x - 20 = \frac{4}{5}(x + 20),$$

$\Rightarrow \quad 10x - 100 = 4(x + 20) \quad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 5},

$\Rightarrow \quad 10x - 100 = 4x + 80 \quad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 10x - 4x = 80 + 100 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 6x = 180 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 30 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 6}

y $\quad 2x = 60$

Respuesta: A tiene 60 bolívares y B 30 bolívares.

2. A tiene la mitad de lo que tiene B, pero si B le da a A 24 colones, ambos tendrían lo mismo. ¿Cuánto tiene cada uno?

Solución:

Sea:

x: dinero que tiene B, en colones

$\frac{x}{2}$: dinero que tiene A, en colones

$x - 24$: dinero que tendría B si le diera 24 colones a B

$\frac{x}{2} + 24$: dinero que tendría A si B le diera 24 colones

De tal manera que:

$$x - 24 = \frac{x}{2} + 24,$$

$\Rightarrow \quad 2x - 48 = x + 48 \quad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 2},

$\Rightarrow \quad 2x - x = 48 + 48 \quad$ {transponiendo};

$\therefore \quad x = 96 \quad$ {reduciendo}

y $\quad \frac{x}{2} = 48$

Respuesta: A tiene 48 colones y B 96 colones.

3. B tiene el doble de lo que tiene A, pero si B le da a A \$6 A tendría los $\frac{3}{5}$ de lo que le quede a B. ¿Cuánto tiene cada uno?

Solución:

Sea:

x: dinero que tiene A

$2x$: dinero que tiene B

$2x-6$: dinero que tendría B si le diera \$6 a A

$x+6$: dinero que tendría A si recibiera \$6 de B

$\frac{3}{5}(2x-6)$: dinero que tendría A si recibiera \$6 de B

De tal manera que:

$$x+6=\frac{3}{5}(2x-6),$$

$\Rightarrow \quad 5x+30=3(2x-6) \qquad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 5},

$\Rightarrow \quad 5x+30=6x-18 \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 5x-6x=-18-30 \qquad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -x=-48 \qquad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=48 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 6}

y $\quad 2x=96$

Respuesta: A tiene \$48 y B \$96.

152

Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado

1. A tiene 38 años y B 28 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de B será los $\frac{3}{4}$ de la de A?

Solución:

Sea:

x: # de años que faltan para que la edad de B sea los 3/4 de la de A

$38+x$: edad de A dentro de x años

$28+x$: edad de B dentro de x años

$\frac{3}{4}(38+x)$: edad de B dentro de x años

De tal manera que:

$$28+x=\frac{3}{4}(38+x),$$

$\Rightarrow \quad 112+4x=3(38+x) \qquad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 4},

$\Rightarrow \quad 112+4x=114+3x \qquad$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 4x-3x=114-112 \qquad$ {transponiendo},

$\therefore \quad x=2 \qquad$ {reduciendo};

Respuesta: la edad de B será los 3/4 de la de A dentro de 2 años.

2. B tiene 25 años y A 30 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de A será los $\frac{7}{6}$ de la edad de B?

Solución:

Sea:

x : # de años que faltan para que la edad de A sea los 7/6 de la de B

$30 + x$: edad de A dentro de x años

$25 + x$: edad de B dentro de x años

$\frac{7}{6}(25 + x)$: edad de A dentro de x años

De tal manera que:

$$30 + x = \frac{7}{6}(25 + x),$$

$\Rightarrow \quad 180 + 6x = 7(25 + x)$ {multiplicando cada término de la ecuación por 6},

$\Rightarrow \quad 180 + 6x = 175 + 7x$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 6x - 7x = 175 - 180$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -x = -5$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 5$ {multiplicando por -1 ambos miembros};

Respuesta: la edad de A será los 7/6 de la de B dentro de 5 años.

3. A tiene 52 años y B 48 años. ¿Cuántos años hace que la edad de B era los $\frac{9}{10}$ de la de A?

Solución:

Sea:

x : # de años que han transcurrido desde que la edad de B era los 9/10 de la de A

$52 - x$: edad de A hace x años

$48 - x$: edad de B hace x años

$\frac{9}{10}(52 - x)$: edad de B hace x años

De tal manera que:

$$48 - x = \frac{9}{10}(52 - x),$$

$\Rightarrow \quad 480 - 10x = 9(52 - x)$ {multiplicando cada término de la ecuación por 10},

$\Rightarrow \quad 480 - 10x = 468 - 9x$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad -10x + 9x = 468 - 480$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -x = -12$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 12$ {multiplicando por -1 ambos miembros};

Respuesta: la edad de B era los 9/10 de la de A hace 12 años.

Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado

1. La longitud de un rectángulo excede al ancho en 3 m. Si cada dimensión se aumenta en 1 m la superficie se aumenta en 22 m^2. Hallar las dimensiones del retángulo.

Solución:

Sea:

x: ancho del rectángulo, en metros

$x+3$: longitud del rectángulo, en m

$x(x+3)=x^2+3x$: superficie del rectángulo, en m^2

$x+1$: ancho aumentado en 1 m

$(x+3)+1=x+4$: longitud aumentada en 1 m

$x^2+3x+22$: superficie aumentada en 22 m^2

$(x+1)(x+4)=x^2+5x+4$: nueva superficie si cada dimensión se aumentara en 1 m

De tal manera que:

$x^2+3x+22=x^2+5x+4,$

$\Rightarrow \quad x^2+3x-x^2-5x=4-22 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -2x=-18 \quad$ {reduciendo},

$\therefore \quad x=9 \quad$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por -2}

y $\quad x+3=12$

Respuesta: las dimensiones del rectángulo son 9 m de ancho por 12 m de longitud.

2. Una de las dimensiones de una sala rectangular es el doble de la otra. Si cada dimensión se aumenta en 5 m el área se aumentará en 160 m^2. Hallar las dimensiones del retángulo.

Solución:

Sea:

x: ancho del rectángulo, en metros

$2x$: longitud del rectángulo, en m

$x(2x)=2x^2$: área del rectángulo, en m^2

$x+5$: ancho aumentado en 5 m

$2x+5$: longitud aumentada en 5 m

$2x^2+160$: superficie aumentada en 160 m^2

$(x+5)(2x+5)=2x^2+15x+25$: nueva superficie si cada dimensión se aumentara en 5 m

De tal manera que:

$2x^2+160=2x^2+15x+25,$

$\Rightarrow \quad 2x^2-2x^2-15x=25-160 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -15x=-135 \quad$ {reduciendo},

$\therefore \quad x=9 \quad$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por -15}

y $\quad 2x=18$

Respuesta: las dimensiones de la sala son 9 m de ancho por 18 m de largo.

3. Una dimensión de un rectángulo excede a la otra en 2 m. Si ambas dimensiones se disminuyen en 5 m el área se disminuye en 115 m^2. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución:

Sea:

x: ancho del rectángulo, en metros

$x+2$: longitud del rectángulo, en m

$x(x+2) = x^2 + 2x$: área del rectángulo, en m^2

$x-5$: ancho disminuido en 5 m

$(x+2)-5 = x-3$: longitud disminuida en 5 m

$x^2 + 2x - 115$: superficie disminuida en 115 m^2

$(x-5)(x-3) = x^2 - 8x + 15$: nueva superficie si cada dimensión se disminuyera en 5 m

De tal manera que:

$x^2 + 2x - 115 = x^2 - 8x + 15,$

$\Rightarrow \quad x^2 - x^2 + 2x + 8x = 15 + 115$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 10x = 130$ {reduciendo},

$\therefore \quad x = 13$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por 10}

y $\quad x + 2 = 15$

Respuesta: las dimensiones del rectángulo son 13 m de ancho por 15 m de largo.

154

Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado

1. El numerador de una fracción excede al denominador en 2. Si el denominador se aumenta en 7 el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción.

Solución:

Sea:

x: numerador de la fracción

$x-2$: denominador de la fracción

$\frac{x}{x-2}$: fracción buscada

$(x-2)+7 = x+5$: denominador de la fracción aumentado en 7

De tal manera que:

$\frac{x}{x+5} = \frac{1}{2},$

$\Rightarrow \quad 2x = x + 5$ {multiplicando cada término por $2(x+5)$; y simplificando},

$\Rightarrow \quad 2x - x = 5$ {transponiendo},

$\therefore \quad x = 5$ {reduciendo}

y $\quad x - 2 = 3$

y $\quad \frac{x}{x-2} = \frac{5}{3}$

Respuesta: la fracción buscada es $\frac{5}{3}$.

2. El denominador de una fracción excede al numerador en 1. Si el denominador se aumenta en 15, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$. Hallar la fracción.

Solución:

Sea:

x: numerador de la fracción

$x+1$: denominador de la fracción

$\frac{x}{x+1}$: fracción buscada

$(x+1)+15 = x+16$: denominador de la fracción aumentado en 15

De tal manera que:

$$\frac{x}{x+16} = \frac{1}{3},$$

$\Rightarrow \quad 3x = x+16 \quad$ {multiplicando cada término por $3(x+16)$; y simplificando},

$\Rightarrow \quad 3x - x = 16 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 2x = 16 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 8 \quad$ {dividiendo cada término de la ecuación por 2}

y $\quad x+1 = 9$

y $\quad \frac{x}{x+1} = \frac{8}{9}$

Respuesta: la fracción buscada es $\frac{8}{9}$.

3. El numerador de una fracción es 8 unidades menor que el denominador. Si a los dos términos de la fracción se suma 1 el valor de la fracción es $\frac{3}{4}$. Hallar la fracción.

Solución:

Sea:

x: numerador de la fracción

$x+8$: denominador de la fracción

$\frac{x}{x+8}$: fracción buscada

$x+1$: numerador aumentado en 1

$(x+8)+1 = x+9$: denominador de la fracción aumentado en 1

De tal manera que:

$$\frac{x+1}{x+9} = \frac{3}{4},$$

$\Rightarrow \quad 4(x+1) = 3(x+9) \quad$ {multiplicando cada término por $4(x+9)$; y simplificando},

$\Rightarrow \quad 4x+4 = 3x+27 \quad$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 4x-3x = 27-4 \quad$ {transponiendo};

$\therefore \quad x = 23 \quad$ {reduciendo}

y $\quad x+8 = 31$

y $\quad \frac{x}{x+8} = \frac{23}{31}$

Respuesta: la fracción buscada es $\frac{23}{31}$.

4. El denominador de una fracción excede al duplo del numerador en 1. Si al numerador se resta 4, el valor de la fracción es 1/3. Hallar la fracción.

Solución:

Sea:

x: numerador de la fracción

$2x$: duplo del numerador

$2x+1$: denominador de la fracción

$\dfrac{x}{2x+1}$: fracción buscada

$x-4$: numerador disminuido en 4

De tal manera que:

$$\frac{x-4}{2x+1}=\frac{1}{3},$$

$\Rightarrow \quad 3(x-4)=(2x+1) \quad$ {multiplicando cada término por $3(2x+1)$; y simplificando},

$\Rightarrow \quad 3x-12=2x+1 \quad$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 3x-2x=1+12 \quad$ {transponiendo};

$\therefore \quad x=13 \quad$ {reduciendo}

y $\quad 2x+1=27$

y $\quad \dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{13}{27}$

Respuesta: la fracción buscada es $\dfrac{13}{27}$.

155

Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado

1. La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede a la cifra de las unidades en 2. Si el número se divide entre la suma de sus cifras, el cociente es 7. Hallar el número.

Sea:

x: cifra de las decenas

$x-2$: cifra de las unidades

$10x+(x-2)=11x-2$: número buscado

{un # de dos cifras es de la forma $10a+b$, donde a: cifra de las decenas, b: cifra de las unidades}

$x+(x-2)=2x-2$: suma de las cifras del número

De tal manera que:

$$\frac{11x-2}{2x-2}=7,$$

$\Rightarrow \quad 11x-2=7(2x-2) \quad$ {multiplicando cada término por $(2x-2)$; y simplificando},

$\Rightarrow \quad 11x-2=14x-14 \quad$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 11x-14x=-14+2 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -3x=-12 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=4 \quad$ {dividiendo cada término de la ecuación por -3}

y $\quad x-2=2$

y $\quad 11x-2=11(4)-2=42$

Respuesta: el número buscado es el 42.

2. La cifra de las unidades de un número de dos cifras excede en 4 a la cifra de las decenas y si el número se divide por la suma de sus cifras el cociente es 4. Hallar el número.

Sea:

x : cifra de las decenas

$x+4$: cifra de las unidades

$10x+(x+4)=11x+4$: número buscado

{un # de dos cifras es de la forma $10a+b$, donde a : cifra de las decenas, b : cifra de las unidades}

$x+(x+4)=2x+4$: suma de las cifras del número

De tal manera que:

$$\frac{11x+4}{2x+4}=4,$$

$\Rightarrow$ $11x+4=4(2x+4)$ {multiplicando cada término por $(2x+4)$; y simplificando},

$\Rightarrow$ $11x+4=8x+16$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $11x-8x=16-4$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $3x=12$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=4$ {dividiendo cada término de la ecuación por -3}

y $x+4=8$

y $11x+4=11(4)+4=48$

Respuesta: el número buscado es el 48.

3. La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el duplo de la cifra de las unidades y si el número, disminuido en 9, se divide por la suma de sus cifras el cociente es 6. Hallar el número.

Sea:

x : cifra de las unidades

$2x$: cifra de las decenas

$10(2x)+x=21x$: número buscado

{un # de dos cifras es de la forma $10a+b$, donde a : cifra de las decenas, b : cifra de las unidades}

$21x-9$: número disminuido en 9

$x+2x=3x$: suma de las cifras del número

De tal manera que:

$$\frac{21x-9}{3x}=6,$$

$\Rightarrow$ $21x-9=18x$ {multiplicando cada término por $3x$; y simplificando},

$\Rightarrow$ $21x-18x=9$ {transponiendo},

$\Rightarrow$ $3x=9$ {reduciendo};

$\therefore$ $x=3$ {dividiendo cada término de la ecuación por 3}

y $2x=6$

y $21x=21(3)=63$

Respuesta: el número buscado es el 63.

7. El denominador de una fracción es 1 menos que el triplo del numerador. Si el numerador se aumenta en 8 y el denominador en 4, el valor de la fracción es $\frac{11}{12}$. Hallar la fracción.

Solución:

Sea:

x: numerador de la fracción

$3x$: triplo del numerador

$3x-1$: denominador de la fracción

$\frac{x}{3x-1}$: fracción buscada

$x+8$: numerador aumentado en 8

$3x-1+4=3x+3$: denominador aumentado en 4

De tal manera que:

$$\frac{x+8}{3x+3}=\frac{11}{12} \Leftrightarrow \frac{x+8}{x+1}=\frac{11}{4} \quad \{\text{dividiendo los denominadores por } 3\},$$

$\Rightarrow \quad 4(x+8)=11(x+1) \quad$ {multiplicando cada término por $4(x+1)$; y simplificando},

$\Rightarrow \quad 4x+32=11x+11 \quad$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 4x-11x=11-32 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -7x=-21 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=3 \quad$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por -7}

y $\quad 3x-1=3(3)-1=9-1=8$

y $\quad \frac{x}{3x-1}=\frac{3}{8}$

Respuesta: la fracción buscada es $\frac{3}{8}$.

1. A puede hacer una obra en 3 días y B en 6 días ¿En cuánto tiempo pueden hacer la obra los dos trabajando juntos?

Sea:

x: # de días que emplearían para terminar la obra, trabajando conjuntamente A y B

$\frac{1}{x}$: parte de la obra que harían en un día, conjuntamente A y B

$\frac{1}{3}$: parte de la obra que haría A en un día

$\frac{1}{6}$: parte de la obra que haría B en un día

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$: parte de la obra que harían A y B, en un día, trabajando juntos

De tal manera que:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{x};$$

$\therefore \quad x=2$ {multiplicando cada término de la ecuación por $2x$; y simplificando}

Respuesta: trabajando juntos A y B, terminarían la obra en 2 días.

2. Una llave puede llenar un depósito en 10 minutos y otra en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo pueden llenar el depósito las dos llaves juntas?

Sea:

x: # de minutos que tardarían en llenar el depósito las dos llaves juntas

$\frac{1}{x}$: parte del depósito que llenarían ambas llaves en un minuto

$\frac{1}{10}$: parte del depósito que llenaría la primera llave en un minuto

$\frac{1}{20}$: parte del depósito que llenaría la segunda llave en un minuto

$\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{2+1}{20}=\frac{3}{20}$: parte del depósito que llenarían las dos llaves juntas en un munuto

De tal manera que:

$$\frac{3}{20}=\frac{1}{x},$$

$\Rightarrow \quad 3x=20$ {multiplicando cada término de la ecuación por $20x$; y simplificando};

$\therefore \quad x=\frac{20}{3} \Leftrightarrow 6\frac{2}{3} \Leftrightarrow 6'40''$ {dividiendo cada término de la ecuación por 3}

Respuesta: las dos llaves juntas pueden llenarel depósito en 6 minutos y 40 segundos.

Problemas sobre ecuaciones fraccionarias de primer grado

1. ¿A qué hora, entre la 1 y las 2, están opuestas las agujas del reloj?

Solución:

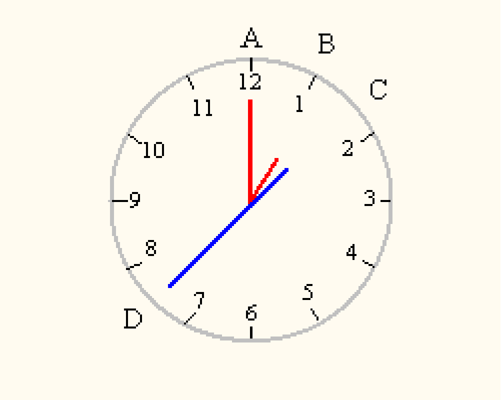
Sea

x : # de divisiones de 1 minuto del $\overset{\frown}{ABCD}$ que el minutero ha recorrido hasta quedar opuesto con el horario

$\frac{x}{12}$: # de divisiones de 1 minuto del $\overset{\frown}{BC}$ que el horario ha recorrrido hasta quedar opuesto con el minutero

$\overset{\frown}{AB} = 5$ divisiones de 1 minuto

$\overset{\frown}{CD} = 30$ divisiones de 1 minuto



Como $\overset{\frown}{ABCD} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$,

$$\Rightarrow \quad x = 5 + \frac{x}{12} + 30 = \frac{x}{12} + 35 \Leftrightarrow 12x = x + 420 \Leftrightarrow 11x = 420 \Leftrightarrow x = \frac{420}{11} \Leftrightarrow x = 38\frac{2}{11}.$$

Respuesta: las agujas del reloj están opuestas a las 1 hora y $38\frac{2}{11}$ minutos.

2. ¿A qué hora, entre las 10 y las 11, las agujas del reloj forman unn ángulo recto?

Solución:

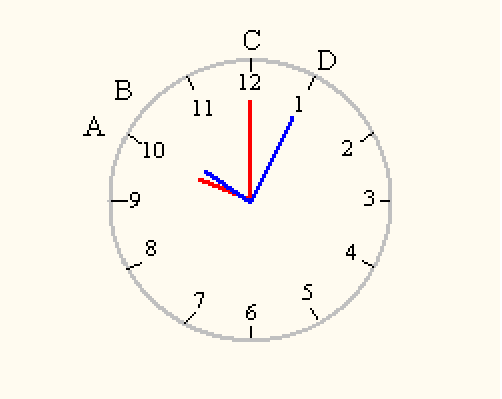
Sea

x : # de divisiones de 1 minuto del $\overset{\frown}{CD}$ que el minutero ha recorrido hasta formar un ángulo recto con el horario

$\frac{x}{12}$: # de divisiones de 1 minuto del $\overset{\frown}{AB}$ que el horario ha recorrrido hasta formar un ángulo recto con el minutero

$\overset{\frown}{BD} = 15$ divisiones de 1 minuto

$\overset{\frown}{AC} = 10$ divisiones de 1 minuto



Ahora

$CD = BD - BC$; pero $BC = AC - AB$; por lo tanto

$CD = BD - (AC - AB)$,

$$\Rightarrow \quad x = 15 - \left(10 - \frac{x}{12}\right) = 15 - 10 + \frac{x}{12} = 5 + \frac{x}{12},$$

$$\Rightarrow \quad 12x = 60 + x,$$

$$\Rightarrow \quad 11x = 60;$$

$$\therefore \quad x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$$

Respuesta: las agujas del reloj forman un ángilo recto a las 10 hora y $5\frac{5}{11}$ minutos.

M i s c e l á n e a

Problemas que se resuelven por ecuaciones de primer grado

1. La diferencia de dos números es 6 y la mitad del mayor excede en 10 a los 3/8 del menor. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # mayor

$x-6$: # menor

De tal manera que:

$$\frac{1}{2}x=\frac{3}{8}(x-6)+10,$$

$\Rightarrow \quad 4x=3(x-6)+80$ {multiplicamos cada término de la ecuación por 8 (el m.c.d.)},

$\Rightarrow \quad 4x=3x-18+80$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 4x=3x+62$ {reduciendo};

$\Rightarrow \quad x=62$ {restando $3x$ en ambos miembros de la ecuación},

y $\quad x-6=62-6=56$

Respuesta: los números buscados son 56 y 62.

2. A tenía \$120 y B \$90. Después que A le dió a B cierta suma, B tiene los 11/10 de lo que le queda a A. ¿Cuánto le dió A a B?

Solución:

Sea

x: dinero que le dió A a B

$120-x$: dinero que le queda a A

$90+x$: dinero con que queda B, una vez a recibido el dinero de A

De tal manera que:

$$90+x=\frac{11}{10}(120-x),$$

$\Rightarrow \quad 900+10x=11(120-x)$ {multiplicamos cada término de la ecuación por 10 (el m.c.d.)},

$\Rightarrow \quad 900+10x=1320-11x$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 10x+11x=1320-900$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 21x=420$ {reduciendo};

$\therefore \quad x=20$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 21}.

Respuesta: A le dió a B \$20.

3. Un número se aumentó en 6 unidades, esta suma se dividió entre 8; al cociente se le sumo 5 y esta nueva suma se dividió entre 2, obteniendo 4 de cociente. Hallar el número.

<u>Solución</u>:

Sea

x : # buscado

$x+6$: # aumentado en 6 unidades

$\dfrac{x+6}{8}$: suma anterior dividida entre 8

$\dfrac{x+6}{8}+5=\dfrac{x+6+40}{8}=\dfrac{x+46}{8}$: sumándole 5 unidades al cocienye anterior

$\dfrac{x+46}{8}\div 2=\dfrac{x+46}{8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+46}{16}$: dividiendo entre 2 la suma anterior

De tal manera que:

$$\frac{x+46}{16}=4,$$

$\Rightarrow \quad x+46=64$ {multiplicamos cada término de la ecuación por 16 (el m.c.d.)};

$\therefore \quad x=18$ {restando 46 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: el número buscado es 18.

4. Se ha repartido una herencia de 48000 soles entre dos personas de modo que la parte de la que recibió menos equivale a los 5/7 de la parte de la persona favorecida. Hallar la parte de cada uno.

<u>Solución</u>:

Sea

x : dinero que recibió la persona favorecida, en soles

$48000-x$: dinero que recibió la persona menos favorecida

De tal manera que:

$$48000-x=\frac{5}{7}x,$$

$\Rightarrow \quad 336000-7x=5x$ {multiplicamos cada término de la ecuación por 7 (el m.c.d.)},

$\Rightarrow \quad 336000=12x$ {sumando $12x$ en ambos miembros de la ecuación},

$\Rightarrow \quad x=28000$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por 12 y transponiendo},

$y \quad 48000-x=20000$

Respuesta: la parte más favorecida recibió 28000 soles y la menos favorecida 20000 soles.

5. Dividir 84 en dos partes tales que 1/10 de la parte mayor equivalga a 1/4 de de la menor.

<u>Solución</u>:

Sea

x : parte mayor

$84 - x$: parte menor

De tal manera que:

$$\frac{1}{10}x = \frac{1}{4}(84 - x),$$

$\Rightarrow$ $2x = 5(84 - x)$ {multiplicamos cada término de la ecuación por 20 (el m.c.d.)},

$\Rightarrow$ $2x = 420 - 5x$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $7x = 420$ {sumando $5x$ en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore$ $x = 60$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por 7}

y $84 - x = 24$

Respuesta: las partes en que se debe dividir el # 84 son 60 y 24.

6. Dividir 120 en dos partes tales que la menor sea a la mayor como 3 es a 5.

<u>Solución</u>:

Sea

x : parte mayor

$120 - x$: parte menor

De tal manera que:

$$\frac{120 - x}{x} = \frac{3}{5},$$

$\Rightarrow$ $600 - 5x = 3x$ {multiplicamos cada término de la ecuación por $5x$ (el m.c.d.)},

$\Rightarrow$ $600 = 8x$ {sumando $5x$ en ambos miembros de la ecuación},

$\Rightarrow$ $x = 75$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por 8 y transponiendo},

y $120 - x = 45$

Respuesta: las partes en que se debe dividir el # 120 son 45 y 75.

7. Un hombre gasta la mitad de su sueldo mensual en el alquiler de la casa y alimentación de su familia y 3/8 del sueldo en otros gastos. Al cabode 15 meses ha ahorrado $300. ¿Cuál es su sueldo mensual?

Solución:

Sea

x: sueldo mensual del hombre

$\frac{1}{2}x$: mitad del sueldo del hombre

$\frac{3}{8}x$: dinero utilizado en otros gastos

$\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x=\frac{4x+3x}{8}=\frac{7}{8}x$: total del dinero gastado en el mantenimiento de la familia del hombre

$x-\frac{7}{8}x=\frac{8x-7x}{8}=\frac{1}{8}x$: dinero que puede ahorrar el hombre en 1 mes

$15\times\frac{1}{8}x=\frac{15}{8}x$: dinero que el hombre puede ahorrar en 15 meses

De tal manera que:

$\frac{15}{8}x=300,$

$\Rightarrow$ $15x=2400$ {multiplicamos cada término de la ecuación por 8};

$\therefore$ $x=160$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por 15}

Respuesta: el sueldo mensual del hombre es de $160.

8. Un hombre gastó 1/5 de lo que tenía en ropa; 3/8 en libros; prestó $102 a un amigo y se quedó sin nada. ¿Cuánto gasto en ropa y cuánto en libros?

Solución:

Sea

x: dinero que el hombre tenía

$\frac{1}{5}x$: dinero que gastó en en ropa

$\frac{3}{8}x$: dinero que gastó en libros

$\frac{1}{5}x+\frac{3}{8}x+102=\frac{23x+4080}{40}$: total de dinero gastado por el hombre

De tal manera que:

$x-\left(\frac{23x+4080}{40}\right)=0$ {se quedó sin nada},

$\Rightarrow$ $40x-(23x+4080)=0$ {multiplicamos cada término de la ecuación por 40 (el m.c.d.)},

$\Rightarrow$ $40x-23x-4080=0$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $17x=4080$ {reduciendo y transponiendo};

$\therefore$ $x=240$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por 17},

y $\frac{1}{15}x=48$

y $\frac{3}{8}x=90$

Respuesta: el hombre gastó en ropa $48 y en libros $90.

9. La edad de B es 2/5 de la edad de A y la de C 2/3 de la de B. Si entre los tres tienen 25 años, ¿cuál es la edad de cada uno?

<u>Solución</u>:

Sea

x: edad de A

$\frac{2}{5}x$: edad de B

$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{4}{15}x$: edad de C

De tal manera que:

$$x + \frac{2}{5}x + \frac{4}{15}x = 25,$$

$\Rightarrow$ $15x + 6x + 4x = 375$ {multiplicamos cada término de la ecuación por 15 (el m.c.d.)},

$\Rightarrow$ $25x = 375$ {reduciendo};

$\therefore$ $x = 15$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por 25}

y $\frac{2}{5}x = \frac{2}{5}(15) = 6$

y $\frac{4}{15}x = \frac{4}{15}(15) = 4$

Respuesta: A tiene 15 años, B 6 años y C 4 años de edad.

10. Vendí un automóvil por 8000 bolívares más la tercera parte de lo que me había costado, y en esta operación gané 2000 bolívares. ¿Cuánto me había costado el auto?

<u>Solución</u>:

Sea

x: dinero que le costó el auto, en bolívares

$\frac{1}{3}x$: tercera parte de lo que le costó el auto

$8000 + \frac{1}{3}x = \frac{24000 + x}{3}$: dinero en que vendió el auto, en bolívares

De tal manera que:

$\frac{24000 + x}{3} - x = 2000$ {la ganancia es igual a la diferencia entre el precio de venta y el de compra},

$\Rightarrow$ $24000 + x - 3x = 6000$ {multiplicando cada término de la ecuación por 3},

$\Rightarrow$ $24000 - 2x = 6000$ {reduciendo},

$\Rightarrow$ $-2x = -18000$ {restando 24000 en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore$ $x = 9000$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por -2}

Respuesta: el automóvil te costó 9000 bolívares.

11. Compré cierto número de libros a 2 por \$5 y los vendí a 2 por \$7, ganando en esta operación \$8. ¿Cuántos libros compré?

<u>Solución</u>:

Sea

x: # de libros que Ud. compró

$5\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{5}{2}x$: precio de compra

$7\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{7}{2}x$: precio de venta

De tal manera que:

$\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}x=8$ {la diferencia entre el precio de venta y el de compra da la ganancia obtenida},

$\Rightarrow$ $\frac{2}{2}x=8$ {sumando los fraccionarios con igual denominador};

$\therefore$ $x=8$ {simplificando}

Respuesta: Ud. compró 8 libros.

12. Compré cierto número de libros a 4 por \$3 y un número de libros igual a los 3/4 del número de libros anterior a 10 por \$7. Vendiéndolos todos a 2 por \$3 gané \$54. ¿Cuántos libros compré?

<u>Solución</u>:

Sea

x: # de libros que Ud. compró a 4 por \$3

$\frac{3}{4}x$: # de libros que Ud. compró a 10 por #7

$x+\frac{3}{4}x=\frac{4x+3x}{4}=\frac{7}{4}x$: # total de libros que Ud. compró

$3\left(\frac{x}{4}\right)+7\left(\frac{\frac{3}{4}x}{10}\right)=\frac{3}{4}x+7\left(\frac{3}{40}x\right)=\frac{3}{4}x+\frac{21}{40}x=\frac{30x+21x}{40}=\frac{51}{40}x$: precio de compra

$3\left(\frac{\frac{7}{4}x}{2}\right)=3\left(\frac{7}{8}x\right)=\frac{21}{8}x$: precio de venta

De tal manera que:

$\frac{21}{8}x-\frac{51}{40}x=54$ {la ganancia es igual a la diferencia entre el precio de venta y el de compra},

$\Rightarrow$ $\frac{105x-51x}{40}=\frac{54}{40}x=54$ {sumando los fraccionarios};

$\therefore$ $x=40$

y $\frac{7}{4}x=\frac{7}{4}(40)=70$

Respuesta: Ud. compró 70 libros.

13. Dividir 150 en cuatro partes, tales que la segunda sea los 5/6 de la primera; la tercera los 3/5 de la segunda y la cuarta 1/3 de la tercera.

Solución:

Sea

x: primera parte

$\frac{5}{6}x$: segunda parte

$\frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}x\right)=\frac{1}{2}x$: tercera parte

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{6}x$: cuarta parte

De tal manera que:

$$x+\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x=150 \qquad \{\text{las cuatro partes suman 150 unidades}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6x+5x+3x+x}{6}=150,$$

$$\Rightarrow \quad 15x=900 \Leftrightarrow x=60 \qquad \{\text{dividiendo cada miembro por 15}\}$$

$$\text{y} \quad \frac{5}{6}x=\frac{5}{6}(60)=50$$

$$\text{y} \quad \frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(60)=30$$

$$\text{y} \quad \frac{1}{6}x=\frac{1}{6}(60)=10$$

Respuesta: las parte son, respectivamente, 60, 50, 30 y 10.

15. A es 10 años mayor que B y hace 15 años la edad de B era los 3/4 de la de A. Hallar las edades actuales.

Solución:

Sea

x: edad actual de A

$x-10$: edad actual de B

$x-15$: edad de A, hace 15 años

$x-10-15=x-25$: esdad de B, hace 15 años

De tal manera que:

$$x-25=\frac{3}{4}(x-15),$$

$$\Rightarrow \quad 4x-100=3(x-15) \qquad \{\text{multiplicando cada término de la ecuación por 4}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4x-100=3x-45 \qquad \{\text{suprimiendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4x-3x=-45+100 \qquad \{\text{transponiendo términos}\};$$

$$\therefore \quad x=55$$

$$\text{y} \quad x-10=55-10=45$$

Respuesta: actualmente A tiene 55 años de edad y B tiene 45 años.

27. Un hombre gastó el año antepasado los 3/8 de sus ahorros; el año pasado 5/12 de sus ahorros iniciales; este año 3/5 de lo que le quedaba y aún tiene $400. ¿A cuánto ascendían sus ahorros?

Solución:

Sea

x: dinero al que ascendían los ahorros del hombre

$(3/8)x$: dinero que el hombre gastó el año antepasado

$(5/12)x$: dinero que el hombre gastó el año pasado

$x-[(3/8)x+(5/12)x]? = (5/24)x$: dinero que el hombre tenía al iniciar este año

$(3/5)(5/24)x = (1/8)x$: dinero que el hombre lleva gastado este año

De tal manera que:

$x-[(3/8)x+(5/12)x+(1/8)x] = 400,$

$\Rightarrow \quad 24x-[9x+10x+3x] = 9\ 600 \qquad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 24},

$\Rightarrow \quad 24x-22x = 9\ 600,$

$\Rightarrow \quad 2x = 9\ 600;$

$\therefore \quad x = 4\ 800$

Respuesta: los ahorros iniciales del hombre ascendían a $4 800.

30. Tengo $9.60 en pesos, piezas de 20 centavos y 10 centavos respectivamente. El número de piezas de 20 centavos es los 3/4 del número de pesos y el número de piezas de 10 centavos es los 2/3 del número de pieazs de 20 centavos. ¿Cuántas monedas de cada clase tengo?

Solución:

$\$9.60 \Leftrightarrow 960$ centavos

$\$1 \Leftrightarrow 100$ centavos

Sea

x: # de pesos

$\frac{3}{4}x$: # de piezas de 20 centavos

$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{2}x$: número de piezas de 10 centavos

$100x$: dinero total de los pesos, en centavos

$20\left(\frac{3}{4}x\right) = 15x$: dinero total de las monedas de 20 centavos, en centavos

$10\left(\frac{1}{2}x\right) = 5x$: dinero total de las piezas de 10 centavos, en centavos

De tal manera que:

$100x+15x+5x = 960 \qquad$ {el dinero total es de 960 centavos},

$\Rightarrow \quad 120x = 960 \qquad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x = 8 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 120}

y $\quad \frac{3}{4}(8) = 6$

y $\quad \frac{1}{2}(8) = 4$

Respuesta: Tienes 8 pesos, 6 monedas de 20 centavos y 4 monedas de 10 centavos.

31. Un comerciante perdió el primer año 1/5 de su capital; el segundo año ganó una cantidad igual a los 3/10 de lo que le quedaba; el tercer año ganó los 3/5 de lo que tenía al terminar el segundo año y entonces tiene 13312 quetzales ¿Cuál era su capital primitivo?

Solución:

Sea

x: capital primitivo del comerciante. en quetzales

$\frac{x}{5}$: parte del capital que perdió el primer año

$x - \frac{x}{5} = \frac{4}{5}x$: capital que le queda al comerciante al terminar el primer año

$\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{6}{25}x$: parte que ganó el segundo año

$\frac{4}{5}x + \frac{6}{25}x = \frac{26}{25}x$: capital que tiene el comerciante al terminar el segundo año

$\frac{3}{5} \cdot \frac{26}{25}x = \frac{78}{125}x$: parte que ganó el tercer año año

$\frac{26}{25}x + \frac{78}{125}x = \frac{208}{125}x$: capital que tiene el comerciante al terminar el tercer año

De tal manera que:

$$\frac{208}{125}x = 13312,$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{13312 \times 125}{208};$$

$$\therefore \quad x = 8000 \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

Respuesta: El capital primitivo del comerciante era de 8000 Quetzales.

44. Un conejo es perseguido por un perro. El conejo lleva una ventaja inicial de 50 de sus saltos al perro. El conejo da 5 saltos mientras que el perro da 2, pero el perro en 3 saltos avanza tanto como el conejo en 8 saltos. ¿Cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar al conejo?

Solución:

Sea

x: # de saltos que da el conejo antes de ser alcanzado por el perro

$\frac{2}{5}x$: # de saltos que da el perro para alcanzar al conejo (en términos de los saltos que ha dado el conejo)

$\frac{2}{5}$: razón entre los saltos del perro y el conejo

$\frac{8}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$

De tal manera que:

$$\frac{16}{15}x = 50 + x,$$

$$\Rightarrow \quad 16x = 750 + 15x;$$

$$\therefore \quad x = 750$$

y $\quad \frac{2}{5}x = \frac{2}{5}(750) = 300$

Respuesta: para alcanzar al conejo, el perro debe dar 300 saltos.

Problema de los móviles

Procedimiento

Se aplica la siguiente fórmula, que da la distancia, *x*, que recorre un móvil antes de alcanzar a un segundo móvil; en función de la distancia que separa los móviles, *a*, y las velocidades del primer móvil, *v*, y la del segundo, *v*':

$$x = \frac{av}{v - v'}$$

1. Un corredor que parte de A da una ventaja de 30 m. a otro que parte de B. El 1° hace 8m. por segundo y el 2° 5m. por segundo. ¿A que distancia de A se encontrarán?

Solución:

$$x = \frac{av}{v - v'} \qquad (1)$$

$a = 30$: distancia que separa los móviles

$v = 8$: velocidad del móvil A

$v' = 5$: velocidad del móvil B

De tal manera que:

$$x = \frac{30(8)}{8 - 5} \qquad \{\text{sustituyendo los valores anteriores en } (1)\};$$

$$\therefore \quad x = \frac{240}{3} = 80.$$

Respuesta: los móviles se encontrarán a una distancia de 80 m. del punto A

2. Dos autos parten de A y B distantes entre si 160 Km. y van uno hacia el otro. El que parte de A va a 50 Km. por hora y el que parte de B a 30 Km. por hora. ¿A que distancia de A se encontrarán?

Solución:

$$x = \frac{av}{v - v'} \qquad (1)$$

$a = 160$: distancia que separa los autos

$v = 50$: velocidad del auto que parte de A

$v' = -30$: velocidad del auto que parte de B $\quad$ {va en sentido opuesto al auto A}

De tal manera que:

$$x = \frac{160(50)}{50 - (-30)} \qquad \{\text{sustituyendo los valores anteriores en } (1)\};$$

$$\therefore \quad x = \frac{8000}{50 + 30} = \frac{8000}{80} = 100.$$

Respuesta: los móviles se encontrarán a una distancia de 100 Km. del punto A.

3. Un tren que va 90 Km. por hora pasa por A en el mismo instante en que otro que va a 40 Km. por hora pasa por B, viniendo ambos hacia C. Distancia entre A y B: 200 Km. ¿A qué distancias de A y B se encontrarán?

Solución:

$$x = \frac{av}{v - v'} \qquad \{\text{distancia en que se encontrán los trenes del punto } A\} \qquad (1)$$

$$x' = \frac{av'}{v - v'} \qquad \{\text{distancia en que se encontrarán los trenes del punto } B\} \qquad (2)$$

$a = 200$: distancia que separa los trenes

$v = 90$: velocidad del tren A

$v' = 40$: velocidad del tren B

De tal manera que:

$$x = \frac{200(90)}{90 - 40} \qquad \{\text{sustituyendo los valores anteriores en } (1)\};$$

$$\therefore \quad x = \frac{18000}{50} = 360.$$

$$x' = \frac{200(40)}{90 - 40} \qquad \{\text{sustituyendo los valores anteriores en } (2)\};$$

$$\therefore \quad x = \frac{8000}{50} = 160.$$

Respuesta: los móviles se encontrarán a una distancia de 360 Km. del punto A, y de una distancia de 160 Km. de B.

4. Un auto que va a 90 Km. por hora pasa por A en el mismo instante en que otro auto que va a 70 Km. por hora pasa por B y ambos van en el mismo sentido. ¿Qué tiempo tardarán en encontrarse si B dista de A 80 Km.?

Solución:

$$x = \frac{av}{v - v'} \qquad (1)$$

$a = 80$: distancia que separa los autos

$v = 90$: velocidad del móvil A

$v' = 70$: velocidad del móvil B

De tal manera que:

$$x = \frac{80(90)}{90 - 70} \qquad \{\text{sustituyendo los valores anteriores en } (1)\};$$

$$\therefore \quad x = \frac{7200}{20} = 360.$$

$$\text{y} \qquad t = \frac{x}{v} = \frac{360}{90} = 4$$

Respuesta: los autos se encontrarán al cabo de 4 horas.

160

Traducción de una fórmula dada al lenguaje vulgar

Procedimiento
"Para traducir una fórmula al lenguaje vulgar, esto es, para describir la regla contenida en una fórmula, basta con sustituir las letras por las magnitudes que ellas representan y expresar las relaciones que la fórmula nos dice existen entre ellas".

Dar la regla correspondiente a las fórmulas siguientes:

1. $A = \frac{1}{2}bh$ siendo A el área de un triángulo, b su base y h su altura.

Solución:

El área de un triángulo es igual al producto de su base por su altura dividido por dos.

2. $e = vt$, siendo e el espacio recorrido por un móvil con movimiento uniforme, v su velocidad y t el tempo.

Solución:

El espacio recorrido por un móvil con movimiento uniforme, es igual al producto de su velocidad por el tiempo empleado en recorrerlo.

3. $t = \frac{e}{v}$. Las letras tienen el significado del caso anterior. t el tempo.

Solución:

El tiempo empleado por un móvil con movimiento uniforme en recorrer determinada distancia es igual al cociente entre la distancia y la velocidad del móvil.

4. $T = Fe$, siendo T trabajo, F fuerza y e camino recorrido.

Solución:

El trabajo es igual al producto entre la fuerza ejercida sobre un cuerpo por la distancia que se ha desplazado el cuerpo desde su punto inicial.

161

Expresar por medio de símbolos una ley matemática o física obtenida como resultado de una investigación

Procedimiento
1. Se identifica cada magnitud con la inicial de su nombre 2. Se escribe la fórmula que relaciona las variables de las magnitudes

Designando las variables por la inicial de su nombre, escriba la fórmula que expresa:

1. La suma de dos números multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

Solución:

Sea

x : número mayor

y : numero menor

$x+y$: suma de los números

$x-y$: diferencia de los números

x^2 : cuadrado del número mayor

y^2 : cuadrado del número menor

De tal manera que:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2.$$

162

Fórmulas

Empleo de fórmulas en casos prácticos

Procedimiento

1. Se sustituye cada letra por su respectivo valor numérico
2. Se efectúan las operaciones indicadas y se simplifica

1. Hallar el área de un triángulo de 10 cm de base y 8 de altura. $A=\frac{1}{2}bh$

Solución:

$A=\frac{1}{2}bh$, b : base, h : altura (1)

$b=10$ (2)

$h=8$ (3)

Sustiuyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$A=\frac{1}{2}(10)(8)=\frac{80}{2}=40$$

Respuesta: el área del triángulo es $40\ \text{cm}^2$.

2. Hallar el área de un cuadrado cuya diagonal mide 8m. $A = \frac{d^2}{2}$.

Solución:

$$A = \frac{d^2}{2}, \quad b: \text{ diagonal} \quad (1)$$

$$d = 8 \quad (2)$$

Sustiuyendo (2) en (1), se obtiene:

$$A = \frac{8^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

Respuesta: el área del cuadrado es $32\ \text{m}^2$.

3. ¿Qué distancia recorre un móvil en 15 seg. si se mueve con movimiento uniforme y lleva una velocidad de 9 m por seg? $e = vt$.

Solución:

$$e = vt, \quad e: \text{ distancia}, \ v: \text{ velocidad}, t: \text{ tiempo} \quad (1)$$

$$v = 9 \quad (2)$$

$$t = 15 \quad (3)$$

Sustiuyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$e = 9(15) = 135$$

Respuesta: el móvil recorre una distancia de 135 m.

4. ¿En qué tiempo el mismo móvil recorrerá 108 m?

Solución:

$$e = vt, \quad e: \text{ distancia}, \ v: \text{ velocidad}, t: \text{ tiempo},$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{e}{v} \quad \{\text{despejando } t \text{ en la fórmula de la distancia}\} \quad (1)$$

$$v = 9 \quad (2)$$

$$e = 108 \quad (3)$$

Sustiuyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$t = \frac{108}{9} = 12$$

Respuesta: el móvil recorrerá una distancia de 108 m, con una velocidad de 9 m/s en 12 s.

5. Hallar la hipotenusa a de un triángulo rectángulo siendo sus catetos $b = 4$ m y $c = 3m$. $a^2 = b^2 + c^2$.

Solución:

$a^2 = b^2 + c^2$, a : hipotenusa, b y c : catetos (1)

$b = 4$ (2)

$c = 3$ (3)

Sustiuyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$a^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$

$\Rightarrow$ $c = 5$ {sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: la hipotenusa mide 5 m.

6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 m y uno de los catetos 5 m. Hallar la medida del otro cateto. $b^2 = a^2 - c^2$.

Solución:

$b^2 = a^2 - c^2$, a : hipotenusa, b y c : catetos (1)

$a = 13$ (2)

$c = 5$ (3)

Sustiuyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$b^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144,$

$\Rightarrow$ $b = 12$ {sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: el otro cateto mide 12 m.

163

Fórmulas

Cambio de sujeto de una fórmula

Procedimiento
Recordemos algunas propiedades de la igualdad entre números reales: **1.** Se puede restar o sumar una misma cantidad en ambos membros de una igualdad **2.** Se puede multiplicar o dividir ambos miembros de una igualdad por una misma cantidad **3.** Se puede saca raíz cuadrada en ambos miembros de una igualdad

1. En la fórmula $e = vt$, despejar v y t.

Solución:

$$e = vt \Leftrightarrow \frac{vt}{t} = \frac{e}{t} \qquad \{\text{dividiendo por } t \text{ ambos miembros de la igualdad}\};$$

$$\therefore \quad v = \frac{e}{t} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

$$e = vt \Leftrightarrow \frac{vt}{v} = \frac{e}{v} \qquad \{\text{dividiendo por } v \text{ ambos miembros de la igualdad}\};$$

$$\therefore \quad t = \frac{e}{v} \qquad \{\text{simplificando}\}.$$

2. En $A = h\left(\frac{b+b'}{2}\right)$ hacer a h el sujeto de la fórmula.

Solución:

$$A = h\left(\frac{b+b'}{2}\right) \Leftrightarrow 2A = h(b+b') \qquad \{\text{multiplicando por 2 ambos miembros}\};$$

$$\therefore \quad h = \frac{2A}{b+b'} \qquad \{\text{dividiendo por } b+b' \text{ ambos miembros de la igualdad}\}.$$

3. En $e = \frac{1}{2}at^2$, despejar a.

Solución:

$$e = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow 2e = at^2 \qquad \{\text{multiplicando por 2 ambos miembros}\};$$

$$\therefore \quad a = \frac{2e}{t^2} \qquad \{\text{dividiendo por } t^2 \text{ ambos miembros de la igualdad}\}.$$

4. En $A = \frac{1}{2}a \cdot l \cdot n$, despejar a, l y n.

Solución:

$$A = \frac{1}{2}a \cdot l \cdot n \Leftrightarrow 2A = a \cdot l \cdot n \qquad \{\text{multiplicando por 2 ambos miembros}\} \qquad (1);$$

$$\therefore \quad a = \frac{2A}{l \cdot n} \qquad \{\text{dividiendo por } l \cdot n \text{ ambos miembros de } (1)\}.$$

$$l = \frac{2A}{an} \qquad \{\text{dividiendo por } an \text{ ambos miembros de } (1)\}.$$

$$n = \frac{2A}{al} \qquad \{\text{dividiendo por } al \text{ ambos miembros de } (1)\}.$$

5. En $A = \pi r^2$, despejar r.

Solución:

$$A = \pi r^2 \Leftrightarrow \frac{A}{\pi} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{A}{\pi} \quad \{\text{dividiendo por } \pi \text{ ambos miembros}\};$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad \{\text{sacando raíz cuadrada en ambos miembros}\}.$$

6. En $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$, despejar x.

Solución:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx \Leftrightarrow 2bx + a^2 = b^2 + c^2 \quad \{\text{sumando } 2bx \text{ en ambos miembros}\},$$

$$\Rightarrow \quad 2bx = b^2 + c^2 - a^2 \quad \{\text{restando } a^2 \text{ en ambos miembros}\};$$

$$\therefore \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \quad \{\text{dividiendo por } 2b \text{ en ambos miembros}\}.$$

7. En $V = V_0 + at$, despejar V_0, a y t.

Solución:

$$V = V_0 + at \quad (1),$$

$$\therefore \quad V_0 = V - at \quad \{\text{restando } at \text{ en ambos miembros de } (1)\}.$$

$$V_0 + at = V \quad \{\text{transponiendo } (1)\} \quad (2),$$

$$\Rightarrow \quad at = V - V_0 \quad \{\text{restando } V_0 \text{ en ambos miembros de } (2)\} \quad (3);$$

$$\therefore \quad a = \frac{V - V_0}{t} \quad \{\text{dividiendo por } t \text{ en ambos miembros de } (3)\}.$$

$$\therefore \quad t = \frac{V - V_0}{a} \quad \{\text{dividiendo por } a \text{ en ambos miembros de } (3)\}.$$

Inecuaciones

Procedimiento

Para resolver una inecuación debemos despejar la incógnita:

1. Se pasan todos los términos que tengan la incógnita en el miembro izquierdo de la inecuación y los términos independientes se escriben en el miembro derecho (cuando un término pasa de un miembro de la inecuación a otro, lo hace con signo cambiado)

2. Se reducen los términos semejantes

3. El coeficiente que multiplica a la incógnita lo pasamos a dividir al miembro derecho; pero, teniendo en cuenta que: si el coeficiente es positivo, el sentido de la desigualdad no cambia; si el coeficiente es negativo, el sentido de la desigualdad cambia

Nota1: pasar el coeficiente numérico del miembro izquierdo a dividir al derecho equivale a multiplicar ambos miembros por el inverso multiplicativo (recíproco).

Nota2:

Hallar el límite de x en las inecuaciones siguientes:

1. $x-5<2x-6$

Solución:

$x-5<2x-6,$

$\Rightarrow \quad x-2x<-6+5 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -x<-1 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x>1 \quad$ {al multiplicar ambos miembros por -1: negativo, el sentido de la desigualdad cambia}.

2. $5x-12>3x-4$

Solución:

$5x-12>3x-4,$

$\Rightarrow \quad 5x-3x>-4+12 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 2x>8 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x>4 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la inecuación por 2}.

3. $x-6>21-8x$

Solución:

$x-6>21-8x,$

$\Rightarrow \quad x+8x>21+6 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 9x>27 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x>3 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la inecuación por 9}.

4. $3x-14<7x-2$

Solución:

$3x-14<7x-2,$

$\Rightarrow \quad 3x-7x<-2+14 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -4x<12 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x>-3$

{dividiendo ambos miembros de la inecuación por -4 (se cambia el sentido de la desigualdad)}.

5. $2x - \frac{5}{3} > \frac{x}{3} + 10$

Solución:

$$2x - \frac{5}{3} > \frac{x}{3} + 10,$$

$\Rightarrow \quad 6x - 5 > x + 30 \quad$ {multiplicando cada término de la desigualdad por 3},

$\Rightarrow \quad 6x - x > 30 + 5 \quad$ {transponiendo}

$\Rightarrow \quad 5x > 35 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x > 7 \quad$ {dividiendo ambos miembros por 5}.

6. $3x - 4 + \frac{x}{4} < \frac{5x}{2} + 2$

Solución:

$$3x - 4 + \frac{x}{4} < \frac{5x}{2} + 2,$$

$\Rightarrow \quad 12x - 16 + x < 10x + 8 \quad$ {multiplicando cada término de la desigualdad por 4 (el M.C.D.},

$\Rightarrow \quad 13x - 16 < 10x + 8 \quad$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad 13x - 10x < 8 + 16 \quad$ {transponiendo}

$\Rightarrow \quad 3x < 24 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x < 8 \quad$ {dividiendo ambos miembros por 3}.

8. $(x+2)(x-1) + 26 < (x+4)(x+5)$

Solución:

$$(x+2)(x-1) + 26 < (x+4)(x+5),$$

$\Rightarrow \quad x^2 + x - 2 + 26 < x^2 + 9x + 20 \quad$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad x^2 + x + 24 < x^2 + 9x + 20 \quad$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad x^2 + x - x^2 - 9x < 20 - 24 \quad$ {transponiendo}

$\Rightarrow \quad -8x < -4 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x > \frac{1}{2} \quad$ {dividiendo ambos miembros por -8 (por lo que se cambió el sentido de la desigualdad)}.

9. $3(x-2) + 2x(x+3) > (2x-1)(x+4)$

Solución:

$$3(x-2) + 2x(x+3) > (2x-1)(x+4),$$

$\Rightarrow \quad 3x - 6 + 2x^2 + 6x > 2x^2 + 7x - 4 \quad$ {suprimiendo paréntesis},

$\Rightarrow \quad 9x - 6 + 2x^2 > 2x^2 + 7x - 4 \quad$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad 9x + 2x^2 - 2x^2 - 7x > -4 + 6 \quad$ {transponiendo}

$\Rightarrow \quad 2x > 2 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad x > 1 \quad$ {dividiendo ambos miembros por 2}.

11. $(x-4)(x+5) < (x-3)(x-2)$

Solución:

$$(x-4)(x+5) < (x-3)(x-2),$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 20 < x^2 - 5x + 6 \qquad \{\text{suprimiendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - x^2 + 5x < 6 + 20 \qquad \{\text{transponiendo}\}$$

$$\Rightarrow \quad 6x < 26 \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore \quad x < \frac{26}{6} \Leftrightarrow x < \frac{13}{3} \qquad \{\text{dividiendo ambos miembros por 6 y simplificando}\}.$$

13. $\dfrac{2x+1}{3x-1} > \dfrac{2x+5}{3x+2}$

Solución:

$$\frac{2x+1}{3x-1} > \frac{2x+5}{3x+2} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3x-1} - \frac{2x+5}{3x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)(3x+2)-(2x+5)(3x-1)}{(3x-1)(3x+2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6x^2+7x+2-6x^2-13x+5}{(3x-1)(3x+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-6x+7}{(3x-1)(3x+2)} > 0 \Leftrightarrow -\frac{6x-7}{(3x-1)(3x+2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6x^2+7x+2-6x^2-13x+5}{(3x-1)(3x+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(6x-7)}{(3x-1)(3x+2)} < 0 \quad (\blacklozenge)$$

{se cambia el sentido de la desigualdad por que se ha multiplicado la fracción por -1}.

Resolvemos $(\blacklozenge)$ aplicando del método de las cruces:

	$x < -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < \frac{7}{6}$	$x > \frac{7}{6}$
$(6x-7)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(3x-1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(3x+2)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(6x-7)}{(3x-1)(3x+2)} < 0$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como el sentido de la desigualdad en $\dfrac{(6x-7)}{(3x-1)(3x+2)} < 0$ es "<" (valores menores que 0), la solución consistirá en aquellos intervalos señalados con el signo menos:

S: $x < -\dfrac{2}{3}$ ó bien $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{6}$.

Nota: para aprender a resolver una inecuación aplicando el método de las cruces, vaya a "Método gráfico".

Procedimiento

Para resolver inecuaciones simultáneas se procede de la siguiente manera:

1. Se despeja la incógnita en ambas inecuaciones (como en el Ejercicio164)

2. A pártir de los resultados obtenidos en el paso anterior se deduce una sola desigualdad (*simple*: aparece un sólo signo de desigualdad; o *compuesta*: aparecen dos signos de desigualdad)

3. Para deducir las desigualdades en el paso 2, se tienen en cuenta los siguientes razonamientos:

(i) Cuando aparecen dos soluciones con signo >, esto es, con dos límites inferiores, el resultado se da con el signo > y con el mayor de los límites inferiores (de la forma $x>a$); pués si $a>b$, todo número que es mayor que a también lo será de b.

(ii) Cuando aparecen dos soluciones con signo <, esto es, con dos límites superiores, el resultado se da con el signo < y con el menor de los límites superiores (de la forma $x<b$); pués si $a>b$, todo número que es menor que b también lo será de a.

(iii) Cuando aparece una solución con signo > y otra con signo <; esto es, una con un límite inferior y la otra con un límite superior; el resultado se da de la forma $a<x<b$, donde a es el límite inferior y b el límite superior.

Hallar el límite de las soluciones comunes a:

1. $x-3>5$ y $2x+5>17$

Solución:

Despejamos la incónita en ambas ecuaciones:

$$x-3>5,$$

$\Rightarrow \quad x>8 \quad$ {sumando 3 en ambos miembros}

$$2x+5>17,$$

$\Rightarrow \quad 2x>12 \quad$ {restando 5 en ambas ecuaciones},

$\Rightarrow \quad x>6 \quad$ {dividiendo ambos miembros por 2}

Se tiene, entonces, que la solución es

$x>8$ y $x>6$; esto es $x>8$ {todo número mayor que 8 es a la vez mayor que 6}.

2. $5-x>-6$ y $2x+9>3x$

Solución:

Despejamos la incónita en ambas ecuaciones:

$5-x>-6,$

$\Rightarrow \quad -x>-11$ {restando 5 en ambos miembros},

$\Rightarrow \quad x<11$ {multiplicando por -1 en ambos miembros (se cambia el sentido de la desigualdad)}

$2x+9>3x,$

$\Rightarrow \quad 2x-3x>-9$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -x>-9$ {reduciendo},

$\Rightarrow \quad x<9$ {multiplicando por -1 en ambos miembros (se cambia el sentido de la desigualdad)}

Se tiene, entonces, que la solución es

$x<11$ y $x<9$; esto es $x<9$ {todo número menor que 9 es a la vez menor que 11}.

Funciones

Procedimiento

1. Se escribe la fórmula de variación adecuada al ejercicio:

- Si A es directamente proporcional a B, Entonces $A = kB$
- Si A es inversamente proprcional a B, entonces $A = \dfrac{k}{B}$
- Si A es directamente proporcional a B y C, entonces $A = kBC$
- Si A es directamente proporcional a B e inversamente proporcional a C, entonces $A = \dfrac{kB}{C}$

2. Se sustituyen los supuestos en la fórmula y se despeja la constante de proporcionalidad *k*.

3. Se sustituyen, el valor de la constante de proporcionalidad *k*, hallado en el paso anterior, y las cantidades dadas en la pregunta, en la fórmula; y se despeja y calcula la cantidad incógnita

1. x es proporcional a y. Si $x = 9$ cuando $y = 6$, hallar x cuando $y = 8$.

Solución:

Como x es proporcional a y, entonces

$$x = ky \qquad (1)$$

Sustituyendo $x = 9$ e $y = 6$ en (1), se tiene:

$$9 = k \times 6;$$

$$\therefore \quad k = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \qquad (2)$$

De tal modo que

$$x = \frac{3}{2}y \qquad \{(2) \text{ en } (1)\}$$

Pero $y = 8$, entonces

$$x = \frac{3}{2} \times 8;$$

$$\therefore \quad x = 12$$

2. x es proporcional a y. Si $y = 3$ cuando $x = 2$, hallar y cuando $x = 24$.

Solución:

Como x es proporcional a y, entonces

$$x = ky \qquad (1)$$

Sustituyendo $x = 2$ e $y = 3$ en (1), se tiene:

$$2 = k \times 3;$$

$$\therefore \quad k = \frac{2}{3} \qquad (2)$$

De tal modo que

$$x = \frac{2}{3}y \qquad \{(2) \text{ en } (1)\}$$

Pero $x = 24$, entonces

$$24 = \frac{2}{3}y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \times 24;$$

$$\therefore \quad y = 36$$

3. A es proporcional a B y C. Si $A = 30$ cuando $B = 2$ y $C = 5$, hallar A cuando $B = 7$ y $C = 4$.

Solución:

Como A es proporcional a B y C, entonces

$$A = kBC \qquad (1)$$

Sustituyendo $A = 30$, $B = 2$ y $C = 5$ en (1), se tiene:

$$30 = k \times 2 \times 5 \Leftrightarrow 30 = 10k;$$

$\therefore \quad k = 3 \qquad (2)$

De tal modo que

$$A = 3BC \qquad \{(2) \text{ en } (1)\}$$

Pero $B = 7$ y $C = 4$, entonces

$$A = 3 \times 7 \times 4;$$

$\therefore \quad A = 84$

15. La longitud de una circunferencia es proporcional al radio. Si una circunferencia de 7 cm de radio tiene una longitud de 44 cm, cuál es el radio de una circunferencia de 66 cm de longitud?

Solución:

Sea

P: longitud de la circunferencia

r: radio

k: constante de proporcionalidad

De tal manera que

$$P = kr \qquad \{\text{la longitud de la circunferencia es proporcional al radio}\} \quad (1),$$

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{P}{r} \qquad \{\text{despejando } k \text{ en } (1)\} \quad (2)$

Para $r = 7$ y $P = 44$, $\Rightarrow \quad k = \dfrac{44}{7} \qquad (3)$

$\Rightarrow \quad P = \dfrac{44}{7} r \qquad \{\text{sustituyendo } (3) \text{ en } (1)\} \quad (4)$

$$r = ? \qquad (5)$$

$$P = 66 \qquad (6)$$

$$66 = \frac{44}{7} r \qquad \{(6) \text{ en } (4)\},$$

$\Rightarrow \quad 3 = \dfrac{2}{7} r;$

$\therefore \quad r = \dfrac{21}{2} \Leftrightarrow 10\dfrac{1}{2}.$

167

Funciones expresables por fórmulas

1. Si A es proporcional a B y $A = 10$ cuando $B = 5$, escribir las fórmulas que las relaciona.

Solución:

$A = kB$, k : constante de proporcionalidad {A es directamente proporcional a B} (1),

$\Rightarrow$ $k = \dfrac{A}{B}$ {despejando a k} (2)

$A = 10$, $B = 5$ (3)

$k = \dfrac{10}{5} = 2$ {(3) en (2)} (4);

$\therefore$ $A = 2B$ {(4) en (1)}.

13. La altura de un triángulo es proporcional al área del triángulo si la base es constante, y es inversamente proporcional a su base si el área es constante. Escribir la fórmula de la altura de un triángulo en función del área y su base, sabiendo que cuando la base es de 4cm y la altura de 10 cm, el área es de 20 cm^2.

Solución:

Sea

a : área del triángulo

b : base del triángulo

h : altura del triángulo

k : constante de proporcionalidad

De tal manera que.

$h = \dfrac{ka}{b}$ (1)

$k = \dfrac{h \cdot b}{a}$ {despejando a k en (1)} (2)

$b = 4$, $h = 10$, $a = 20$ (3),

$\Rightarrow$ $k = \dfrac{10 \cdot 4}{20}$ {(3) en (2)} (4),

$\Rightarrow$ $k = 2$ {simplificando} (5);

$\therefore$ $h = \dfrac{2a}{b}$ {(5) en (1)}.

168

Repesentación gráfica de las funciones

P r o c e d i m i e n t o

Para ubicar puntos en el Plano cartesiano, se procede de la siguiente manera:

1. Se marca en el eje*x* el valor correspondiente a la abscisa del punto y se traza una paralela al eje*y* que pase por este punto

2. Se marca sobre el eje*y* el valor correspondiente a la ordenada del punto y se traza una paralela al eje*x* que pase por dicho punto

3. La intersección de las rectas paralelas trazadas en los pasos anteriores será el punto del plano cuyas coordenadas nos fue suministrada

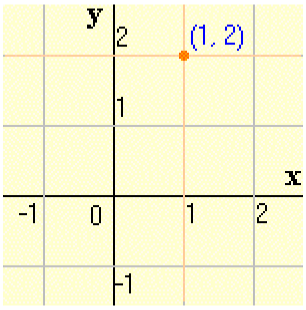
Nota: como para los ejercicios que vamos a realizar a continuación se va a utilizar "*papel cuadriculado*", no hay necesidad de trazar las paralelas (pues ya están trazadas); hay que ubicar los valores correspondientes de la abscisa, en el eje*x*, y de la ordenada, en el eje*y*, y proceder a desplazarse por la paralela correspondiente y marcar el punto en el que las rectas paralelas se intersectan.

Determinar gráficamente los puntos:

1. (1, 2)

Solución:

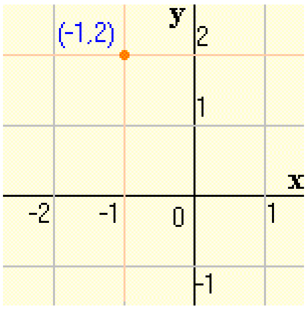
La abscisa del punto es 1 y la ordenada 2; por lo que trazamos una paralela al eje*y* que corte al eje*x* en 1 y, una paralela al eje*x* que corte al eje*y* en 2. El punto estará ubicado en la intersección de las dos paralelas.



2. (-1, 2)

Solución:

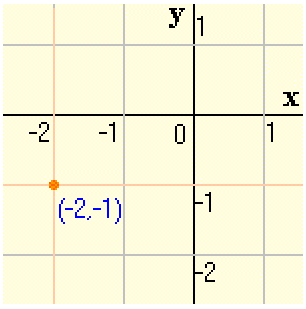
La abscisa del punto es -1 y la ordenada 2; por lo que trazamos una paralela al eje*y* que corte al eje*x* en -1 y, una paralela al eje*x* que corte al eje*y* en 2. El punto estará ubicado en la intersección de las dos paralelas.



3. (-2, -1)

Solución:

La abscisa del punto es -2 y la ordenada -1; por lo que trazamos una paralela al eje*y* que corte al eje*x* en
 -2 y, una paralela al eje*x* que corte al eje*y* en -1. El punto estará ubicado en la intersección de las dos paralelas.

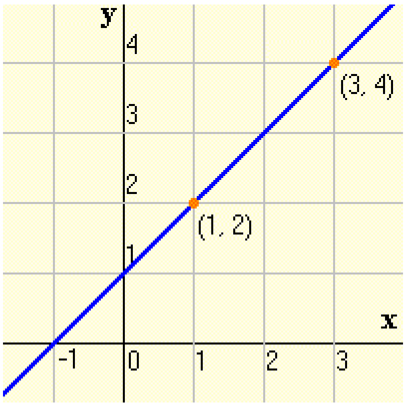


Trazar la línea que pasa por los puntos:

16. (1, 2) y (3, 4)

<u>Solución</u>:

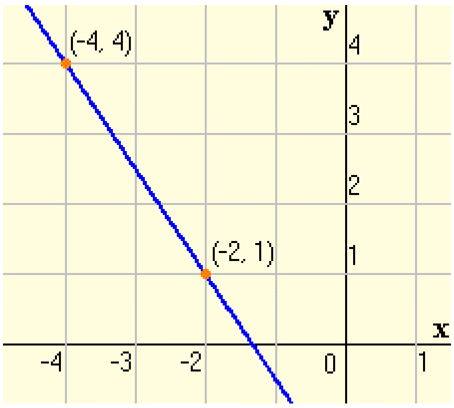
Ubicamos los puntos en el plano como aprendimos en los ejercicios anteriores y trazamos una línea recta que pase por ambos puntos (que los contenga).



17. (-2, 1) y (-4, 4)

<u>Solución</u>:

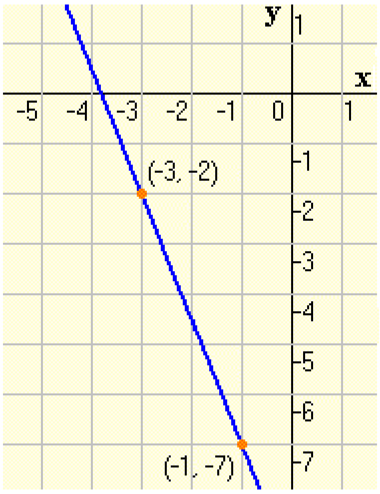
Ubicamos los puntos en el plano como aprendimos en los ejercicios anteriores y trazamos una línea recta que pase por ambos puntos (que los contenga).



18. (-3, -2) y (-1, -7)

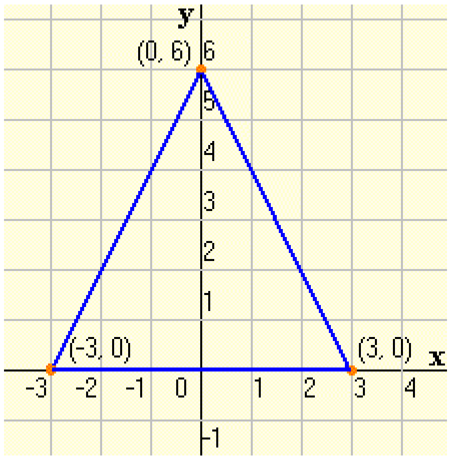
<u>Solución</u>:

Ubicamos los puntos en el plano como aprendimos en los ejercicios anteriores y trazamos una línea recta que pase por ambos puntos (que los contenga).



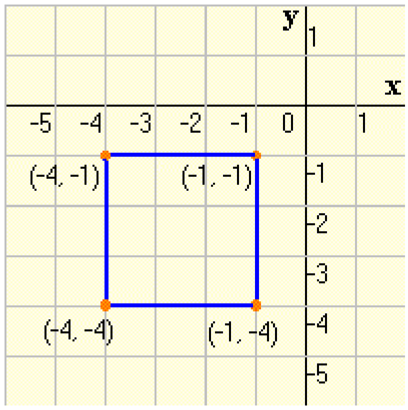
25. Dibujar el triángulo cuyos vértices son los puntos (0, 6), (3, 0), (-3, 0)

Solución:
Ubicamos los puntos en el plano cartesiano como aprendimos en los ejercicios anteriores y trazamos segmentos de recta que unan la pareja de puntos correspondiente.



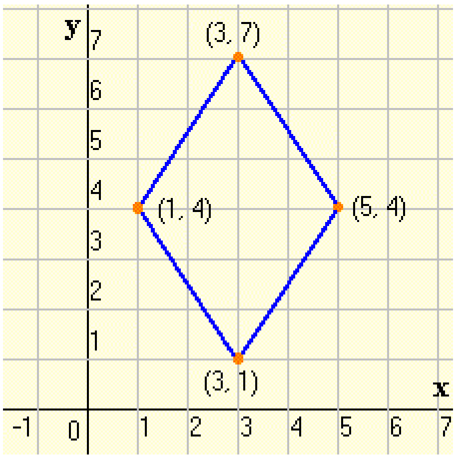
28. Dibujar el cuadrado cuyos vértices son los puntos (-1, -1), (-4, -1), (-4, -4), (-1, -4)

Solución:
Ubicamos los puntos en el plano cartesiano como aprendimos en los ejercicios anteriores y trazamos segmentos de recta que unan la pareja de puntos correspondiente.



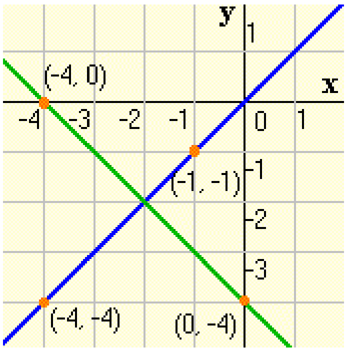
30. Dibujar el rombo cuyos vértices son los puntos (1, 4), (3, 1), (5, 4), (3, 7)

Solución:
Ubicamos los puntos en el plano cartesiano como aprendimos en los ejercicios anteriores y trazamos segmentos de recta que unan la pareja de puntos correspondiente.



33. Probar gráficamente que la línea que pasa por (-4, 0) y (0, -4) es perpendicular a la línea que pasa por los puntos (-1, -1) y (-4, -4)

Solución:
Ubicamos los puntos en el plano cartesiano como aprendimos en los ejercicios anteriores y trazamos segmentos de recta que unan la pareja de puntos correspondiente. Como se puede observar en la gráfica las rectas son perpendiculares entre sí.



169

Representación gráfica de la función lineal de primer grado

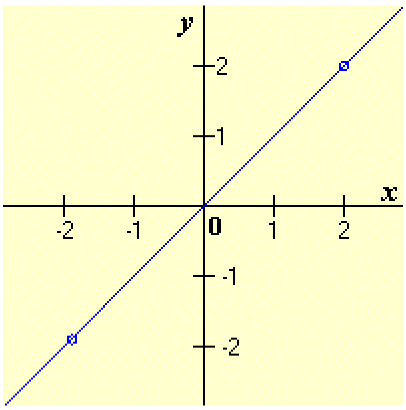
P r o c e d i m i e n t o

1. Se despeja la función
2. Se construye una tabla de valores (basta con dos pares)
3. Se ubican dichos puntos en el plano cartesiano (tomando los valores correspondientes a la variable independiente *x* como abscisas y a los de la función *y* como ordenadas)
4. Se unen los puntos por una línea recta, prolongándola de tal modo que esté representada en todo el plano

Representar gráficamente las funciones:

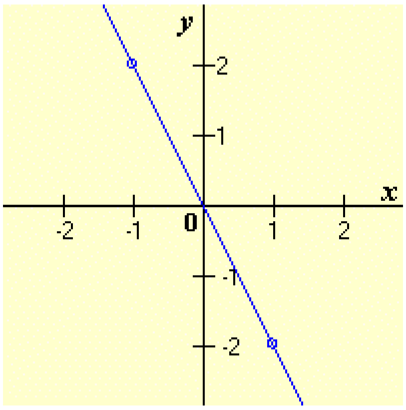
1. $y = x$.
S o l u c i ó n :

x	-2	0	2
y	-2	0	2



2. $y = -2x$
S o l u c i ó n :

x	-1	0	1
y	2	0	-2

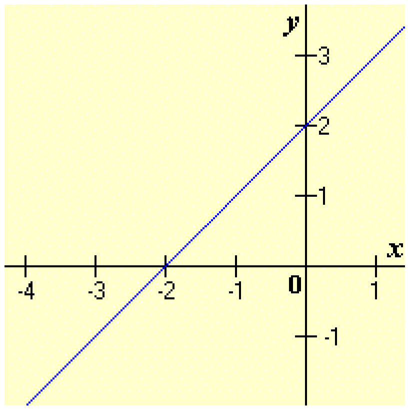


3. $y = x + 2$

<u>Solución</u>:

x	-2	0
y	0	2

Es aconsejable hallar los interceptos con los ejes.

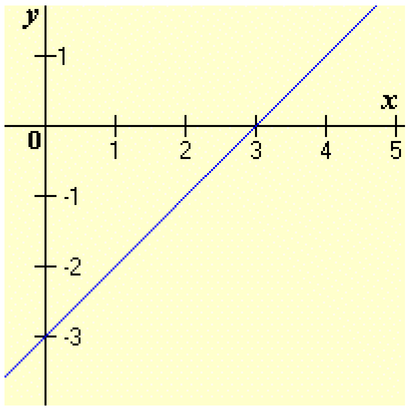


4. $y = x - 3$

<u>Solución</u>:

x	0	3
y	-3	0

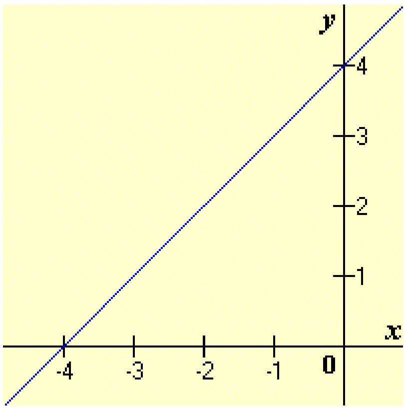
Es aconsejable hallar los interceptos con los ejes.



5. $x + 4$

<u>Solución</u>:

x	-4	0
y	0	4

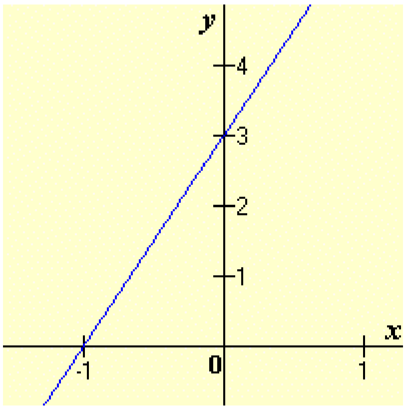


Es aconsejable hallar los interceptos con los ejes.

6. $y = 3x + 3$

<u>Solución</u>:

x	-1	0
y	0	3

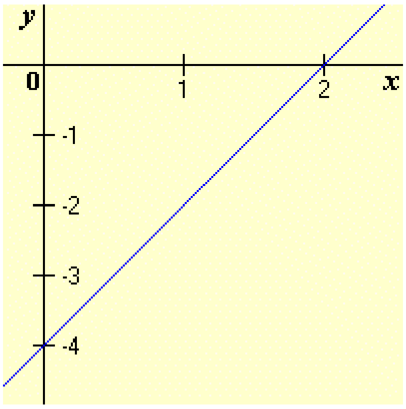


Es aconsejable hallar los interceptos con los ejes.
Las escalas para los ejes pueden ser diferentes (con el objeto de que la gráfica quede bien distribuida en el plano)

7. $y = 2x - 4$

<u>Solución</u>:

x	0	2
y	-4	0



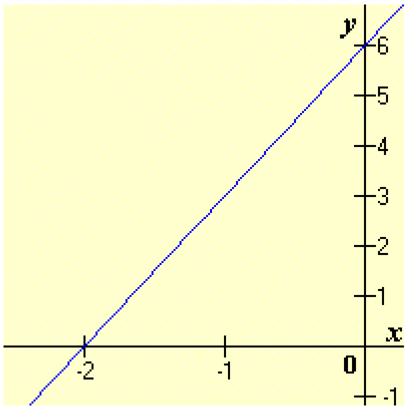
Es aconsejable hallar los interceptos con los ejes.

8. $y = 3x + 6$

<u>Solución</u>:

x	-2	0
y	0	6

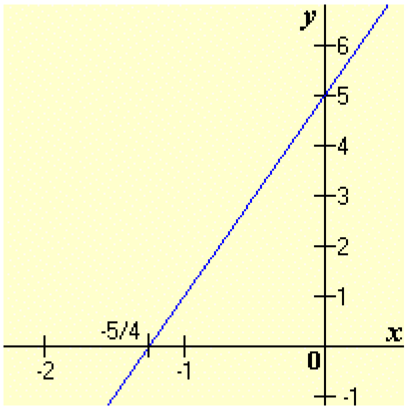
Es aconsejable hallar los interceptos con los ejes.



9. $y = 4x + 5$

Solución:

x	-2	0
y	-3	5

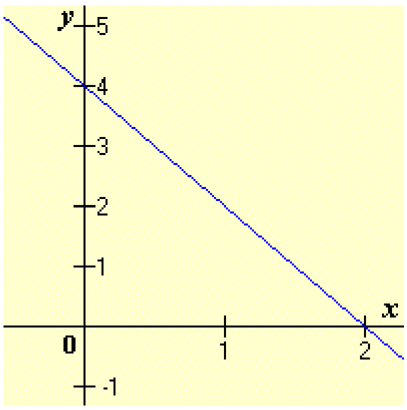


10. $y = -2x + 4$

Solución:

x	0	2
y	4	0

Es importante hallar los interceptos con los ejes.

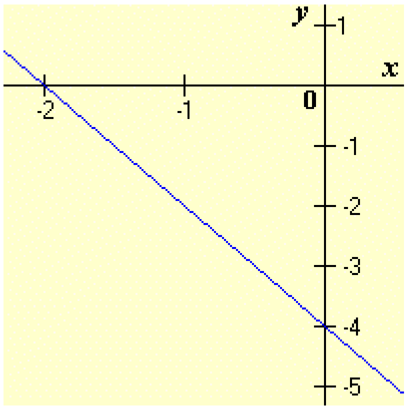


11. $y = -2x - 4$

Solución:

x	-2	0
y	0	-4

Es aconsejable hallar los interceptos con los ejes.

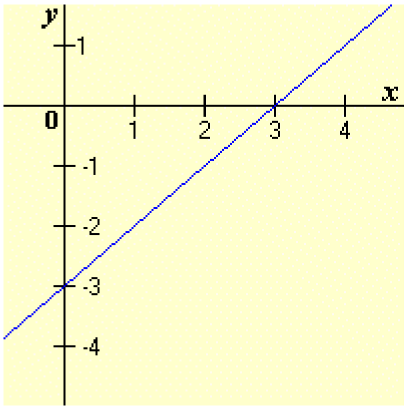


12. $y = x - 3$

Solución:

x	-2	0
y	0	-4

Es importante hallar los interceptos con los ejes.

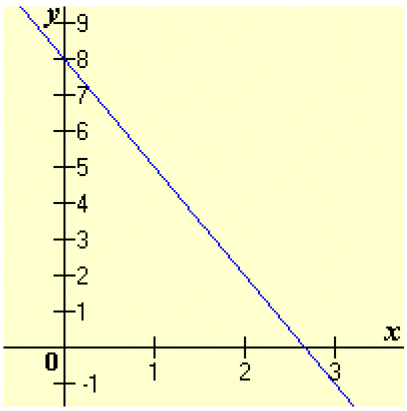


13. $y = 8 - 3x$

Solución:

x	-2	0
y	0	-4

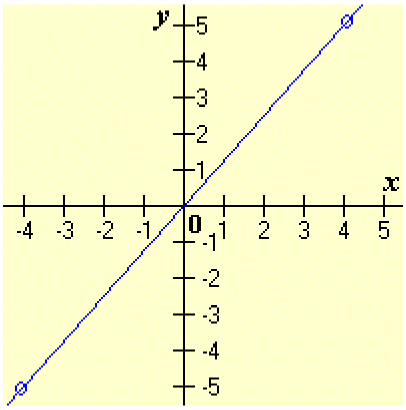
Es importante hallar los interceptos con los ejes.



14. $y = \dfrac{5x}{4}$

Solución

x	-4	0	4
y	-5	0	5

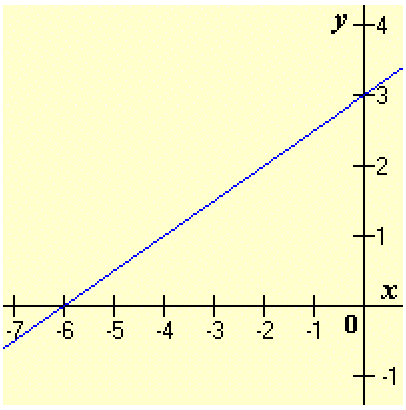


15. $y = \dfrac{x+6}{2}$

Solución

x	-6	0
y	0	3

Es importante hallar los interceptos con los ejes.

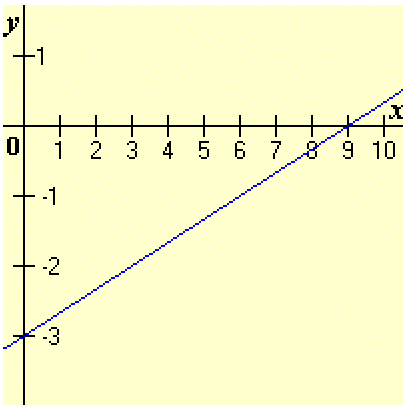


16. $y = \dfrac{x-9}{3}$

Solución:

x	0	9
y	-3	9

Es importante hallar los interceptos con los ejes.

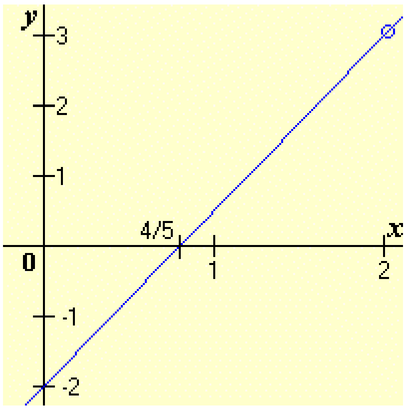


17. $y = \dfrac{5x-4}{2}$

Solución:

x	0	2
y	-2	3

Es importante hallar los interceptos con los ejes.

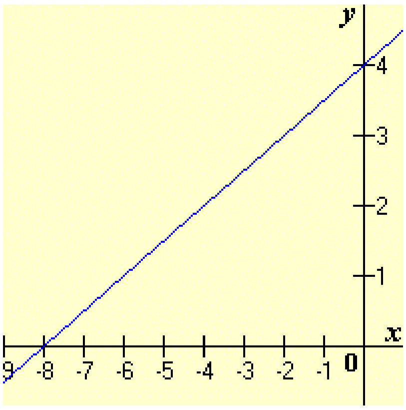


18. $y = \frac{x}{2} + 4$

<u>Solución</u>:

x	-8	0
y	0	4

Es importante hallar los interceptos con los ejes.



Representar gráficamente las siguientes funciones siendo y la variable dependiente

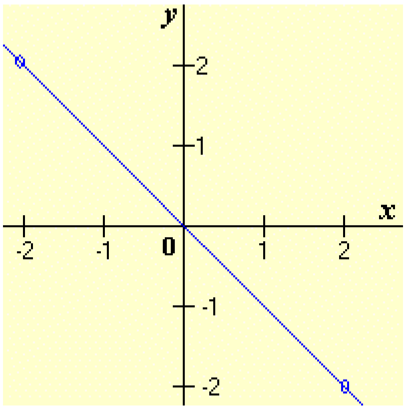
19. *x + y = 0*

<u>Solución</u>:

$$x + y = 0,$$

$$\Rightarrow \quad y = -x$$

x	-2	0	2
y	2	0	-2



20. *2x =3y*

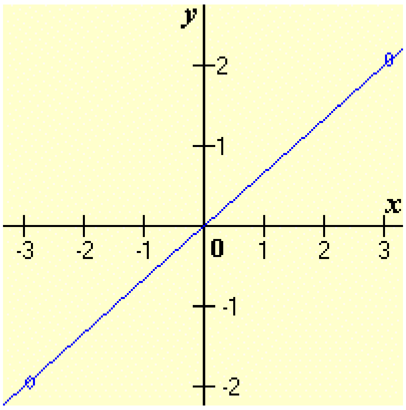
<u>Solución</u>:

$$2x = 3y,$$

$$\Rightarrow \quad 3y = 2x,$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x$$

x	-3	0	3
y	-2	0	2



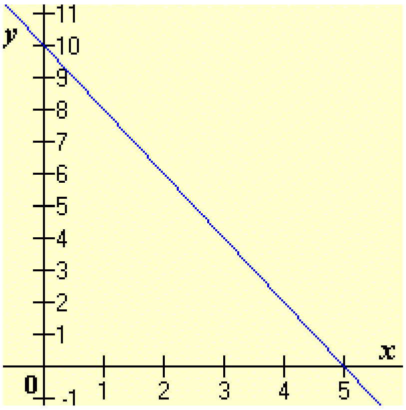
21. *2x + y = 10*

<u>Solución</u>:

$$2x + y = 10,$$

$$\Rightarrow \quad y = 10 - 2x$$

x	0	5
y	10	0



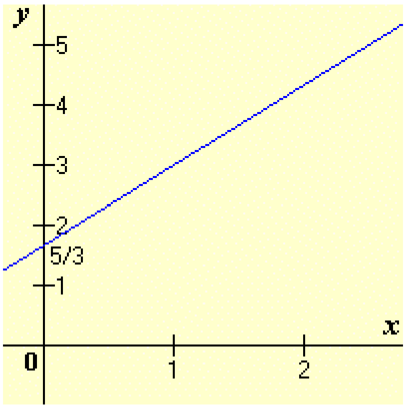
22. $3y = 4x + 5$

<u>Solución</u>:

$$3y = 4x + 5,$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{4x + 5}{3}$$

x	0	1
y	5/3	3



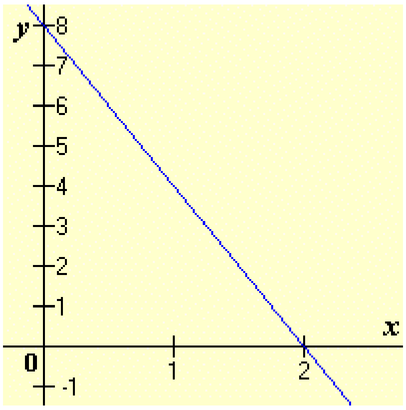
23. *4x + y = 8*

<u>Solución</u>:

$$4x + y = 8,$$

$$\Rightarrow \quad y = 8 - 4x$$

x	0	2
y	8	0



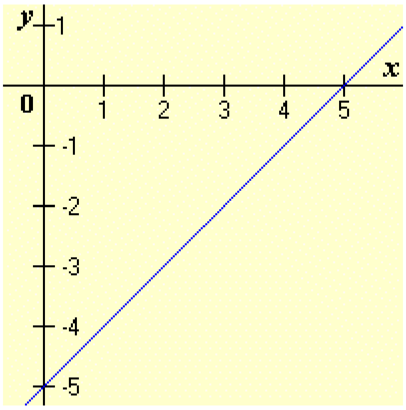
24. $y + 5 = x$

<u>Solución</u>:

$$y + 5 = x,$$

$$\Rightarrow \quad y = x - 5$$

x	0	5
y	-5	0



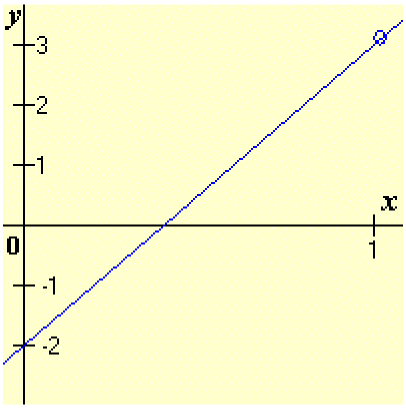
25. $5x - y = 2$

<u>Solución</u>:

$$5x - y = 2,$$

$$\Rightarrow \quad y = 5x - 2$$

x	0	1
y	-2	3

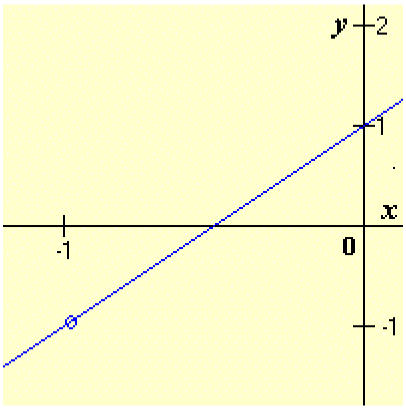


26. $2x = y - 1$

<u>Solución</u>:

$$2x = y - 1,$$
$$\Rightarrow \quad y = 2x + 1$$

x	-1	0
y	-1	1



Representación gráfica de las funciones
Gráficos de algunas funciones de segundo grado

P r o c e d i m i e n t o

Con los conocimientos obtenidos hasta el momento en el estudio del álgebra es insuficiente para trazar rigurosamente la gráfica de una función o de una ecuación de segundo grado (en Cálculo se enseñan técnicas para trazar la gráfica de una función cualquiera con la precisión deseada). Sinembargo es posible hacer una gráfica aproximada efectuando los siguientes pasos:

1. Se hace una tabla de valores asignando valores arbitrarios a la variable independiente, la *x*, y calculando los valores correspondientes para la variable dependiente (la función), la *y*.

2. Se ubican en el plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas hallamos en el paso anterior.

3. Se unen mediante una curva continua los puntos ubicados en el plano (*interpolación*)

Nota: en la solución de cada ejercicio en particular voy a comentar algunas propiedades importantes de cada tipo de gráfica

Hallar el gráfico de:

1. $y = 2x^2$

Solución:

La gráfica de toda función de la forma

$y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$

se denomina parábola.

Si el coeficiente de x^2, es decir a, es positiva, la parábola abre hacia arriba; por el contrario si $a < 0$, la gráfica abre hacia abajo.

Es importante calcular las coordenadas del vértice.

Para hallar el valor de la abscisa del vértice se utiliza la fórmula $x = -\frac{b}{2a}$; el valor de la ordenada se calcula mediante la ecuación de la función.

En particular para $y = 2x^2$, $a = 2$, y $b = c = 0$

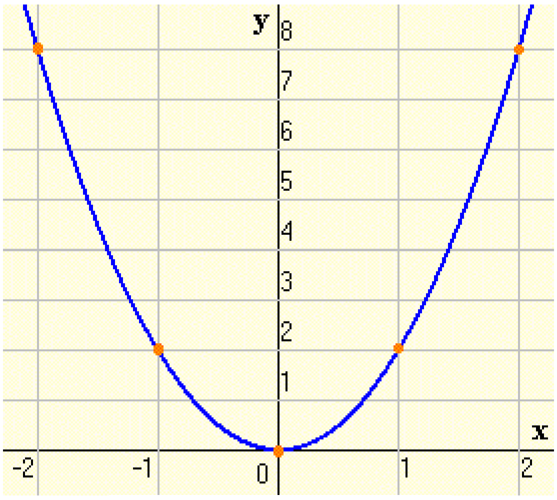
$a = 2 > 0$: la parábola abre hacia arriba

$x = -\frac{0}{2(2)} = 0$ y $y(0) = 2(0)^2 = 0$

Las coordenadas del vèrtice son (0, 0), es decir el vèrtice coincide con el origen de coordenadas.

En general, para las gràficas de las funciones de la forma $y = \pm ax^2$, el vèrtice de la paràbola coincide con el origen del palno cartesiano.

Es conveniente hallar las coordenadas de dos puntos a la izquierda del vértice y de dos puntos a la derecha del vértice.



$y(-2) = 2(-2)^2 = 2(4) = 8$

$y(-1) = 2(-1)^2 = 2(1) = 2$

$y(2) = 2(2)^2 = 2(4) = 8$

$y(1) = 2(1)^2 = 2(1) = 2$

x	y
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8

3. $x^2 + y^2 = 25$

Solución:

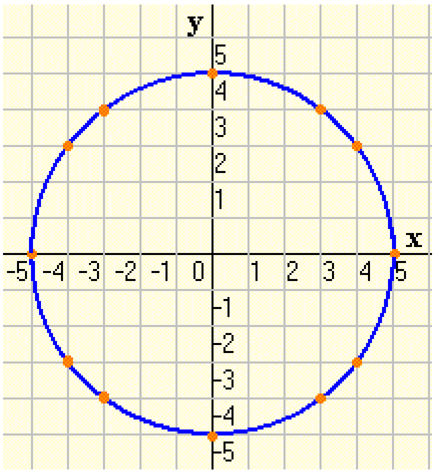
$x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5^2$

La gràfica de la ecuaciòn es una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 5.

Despejemos y en $x^2 + y^2 = 25$,

$\Rightarrow \quad y^2 = 25 - x^2$,

$\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{25 - x^2}$



$y(-5) = \pm\sqrt{25 - (-5)^2} = \pm\sqrt{25 - 25} = 0$

$y(-4) = \pm\sqrt{25 - (-4)^2} = \pm\sqrt{25 - 16} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$y(-3) = \pm\sqrt{25 - (-3)^2} = \pm\sqrt{25 - 9} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

$y(0) = \pm\sqrt{25 - 0^2} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$y(3) = \pm\sqrt{25 - 3^2} = \pm\sqrt{25 - 9} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

$y(4) = \pm\sqrt{25 - 4^2} = \pm\sqrt{25 - 16} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$y(-5) = \pm\sqrt{25 - 5^2} = \pm\sqrt{25 - 25} = 0$

x	y
-5	0
+-4	+-3
+-3	+-4
0	+-5
5	0

4. $9x^2 + 16y^2 = 144$

Solución:

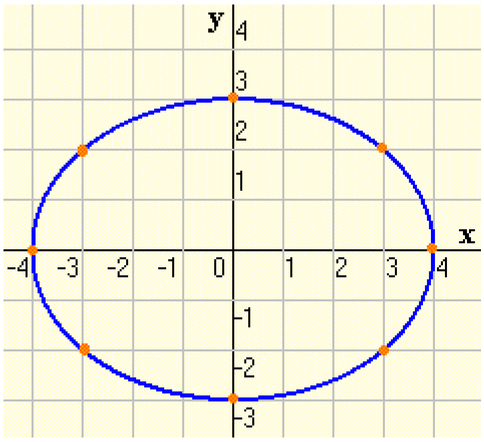
La gràfica de la ecuaciòn es una elipse

Despejemos y en $9x^2 + 16y^2 = 144$,

$\Rightarrow \quad 16y^2 = 144 - 9x^2$,

$\Rightarrow \quad 4y = \pm\sqrt{144 - 9x^2}$,

$\Rightarrow \quad y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{144 - 9x^2}$



$y(\pm 4) = \pm\frac{1}{4}\sqrt{144 - 9(\pm 4)^2} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{144 - 9(16)}$

$= \pm\frac{1}{4}\sqrt{144 - 144} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{0} = 0$

$y(\pm 3) = \pm\frac{1}{4}\sqrt{144 - 9(\pm 3)^2} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{144 - 9(9)}$

$= \pm\frac{1}{4}\sqrt{144 - 81} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{63} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{7} \approx \pm 1.98$

$y(0) = \pm\frac{1}{4}\sqrt{144 - 9(0)^2} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{144 - 0} = \pm\frac{1}{4}(12) = \pm 3$

x	y
+-4	0
+-3	+-1.98
0	+-3

7. $xy = 4$

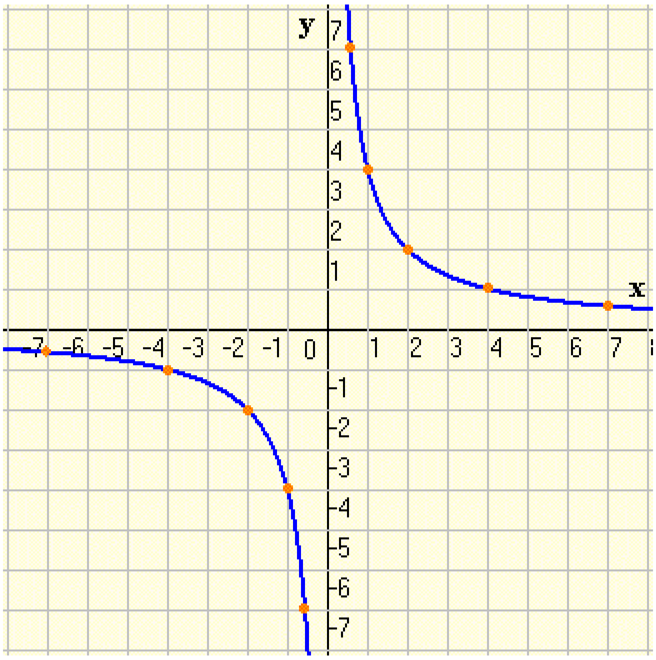
Solución:

La gràfica de la funciòn es una hipérbola rectangular

Despejemos y en $xy = 4$,

$$\Rightarrow \quad y = \frac{4}{x}$$

Notamos que el denominador de la fracción de la derecha es x, la variable independiente. Como la división por 0 no existe, x no puede tomar el valor 0. Podemos dar a x cualquier valor tan cercano a cero como deseemos pero nunca igual a cero. Valores positivos cercanos a 0 son por ejemplo 0.001; y un valor negativo sería por ejemplo -0.001. También es de observar que para ningún valor de x, por grande que sea, la y se hace cero. A grandes rasgos, concluimos que la gráfica de la función se acerca pero nunca intersecta ninguno de los ejes coordenados. Se dice que los ejes son *asíntotas* de la gráfica de la función.



$y(-7) = \frac{4}{-7} \approx -0.57$ $\qquad$ $y(4/7) = \frac{4}{4/7} = 7$

$y(-4) = \frac{4}{-4} = -1$ $\qquad$ $y(1) = \frac{4}{1} = 4$

$y(-2) = \frac{4}{-2} = -2$ $\qquad$ $y(2) = \frac{4}{2} = 2$

$y(-1) = \frac{4}{-1} = -4$ $\qquad$ $y(4) = \frac{4}{4} = 1$

$y(-4/7) = \frac{4}{-4/7} = -7$ $\qquad$ $y(7) = \frac{4}{7} \approx 0.57$

x	y
-7	-0.57
-4	-1
-2	-2
-1	-4
-4/7	-7
4/7	7
1	4
2	2
4	1
7	0.57

P r o c e d i m i e n t o

1. A partir de los datos del ejercicio se deduce la ecuación de la función
a. Se designa tanto la variable independiente como la dependiente
b. Se halla la constante de proporcionalidad
c. Se establece la fórmula de la función que dé *y* en términos de *x*
2. Se calculan las coordenadas de algunos de los puntos (para una función lineal, cuya gráfica es un línea recta, basta con calcular las coordenadas de dos de sus puntos)
3. Se ubican en el plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas hallamos en el paso anterior
4. Se unen por medio de uina línea recta los puntos en el plano
5. A partir de la gráfica se deduce lo que se pide en el problema

1. Construir la gráfica que permita hallar el costo de cualquier número de metros de tela (hasta 10 m) sabiendo que 3 m cuestan $4.
Solución-Juan Beltrán:

El costo de la tela en $ es proporcional al número de metros de la misma; y la constante de proporcionalidad del precio de la tela con respecto al # de metros es $\frac{4}{3}$; de tal manera que la funciòn y, que nos permite hallar el precio de cualquier # de metros de tela x, està dada por

$$y = \frac{4}{3}x$$

$$y(0) = \frac{4}{3}(0) = 0$$

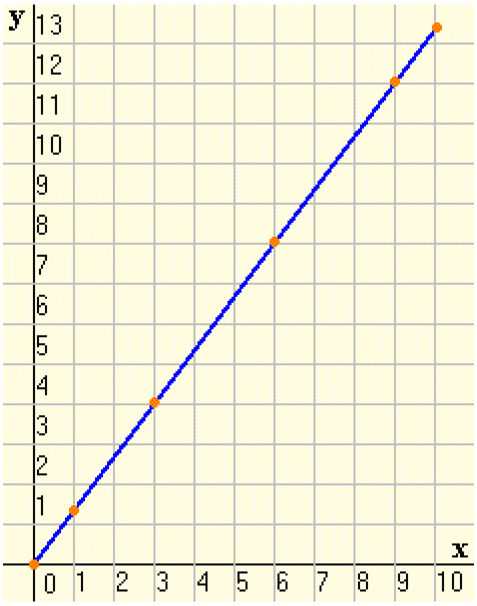
$$y(1) = \frac{4}{3}(1) = \frac{4}{3} \approx 1.3$$

$$y(3) = \frac{4}{3}(3) = 4$$

$$y(6) = \frac{4}{3}(6) = \frac{24}{3} = 8$$

$$y(9) = \frac{4}{3}(9) = \frac{36}{3} = 12$$

$$y(10) = \frac{4}{3}(10) = \frac{40}{3} \approx 13.3$$



x	y
0	0
1	1.3
6	8
9	12
10	13.3

5. Por 3 horas de trabajo un hombre recibe un salario de 18 soles. Halle gráficamente el salario de 4 horas, 5 horas y 7 horas.

Solución-Juan Beltrán:

Vamos a deducir la función que de el total de dinero (en soles) ganado por el hombre en función de las horas trabajadas.

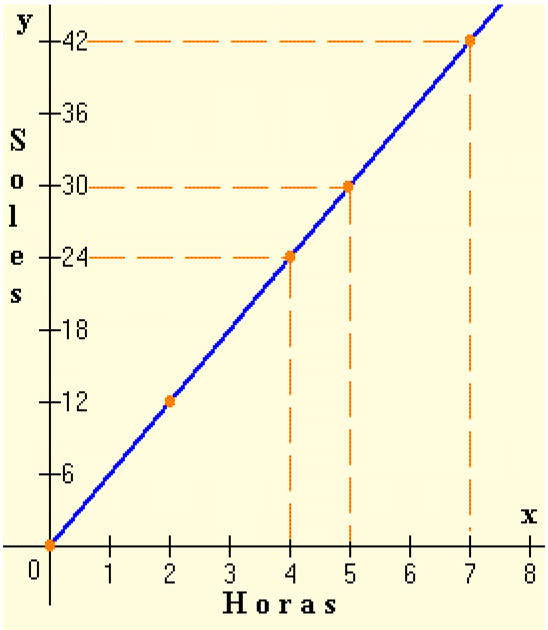
Como el hombre recibe 18 soles por cada 3 horas de trabajo, la constante de proporcionalidad es $\frac{18}{3} = 6$; de tal manera que:

$$y = 6x$$

Para trazar la gràfica de una funciòn lineal es suficiente con calcular las coordenadas de dos de sus puntos:

$y(0) = 0$

$y(2) = 12$



Como se puede deducir de la gráfica (*extrapolando*), el salario de 4 horas es de 24 soles, el de 5 horas de 30 soles, y de 7 horas de 42 soles.

10. Un hombre sale de O hacia M, situado a 63 km. de O, a 10 km. por hora, a las 11 a.m. y otro sale de M hacia O, en el mismo instante, a 8 km por hora. Determinar gráficamente el punto de encuentro y la hora a que se encuentran.

Solución-Juan Beltrán:

De la fórmula de la velocidad $v = \frac{d}{t}$, d: distancia, t: tiempo; despejamos la distancia d:

$$d = vt$$

sea

t: tiempo, en horas

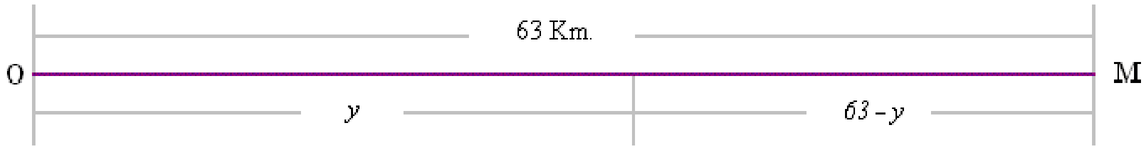
d: distancia recorrida, en Km.

- Para el hombre que sale de O, la distancia recorrida y en función del tiempo t, está dada por:

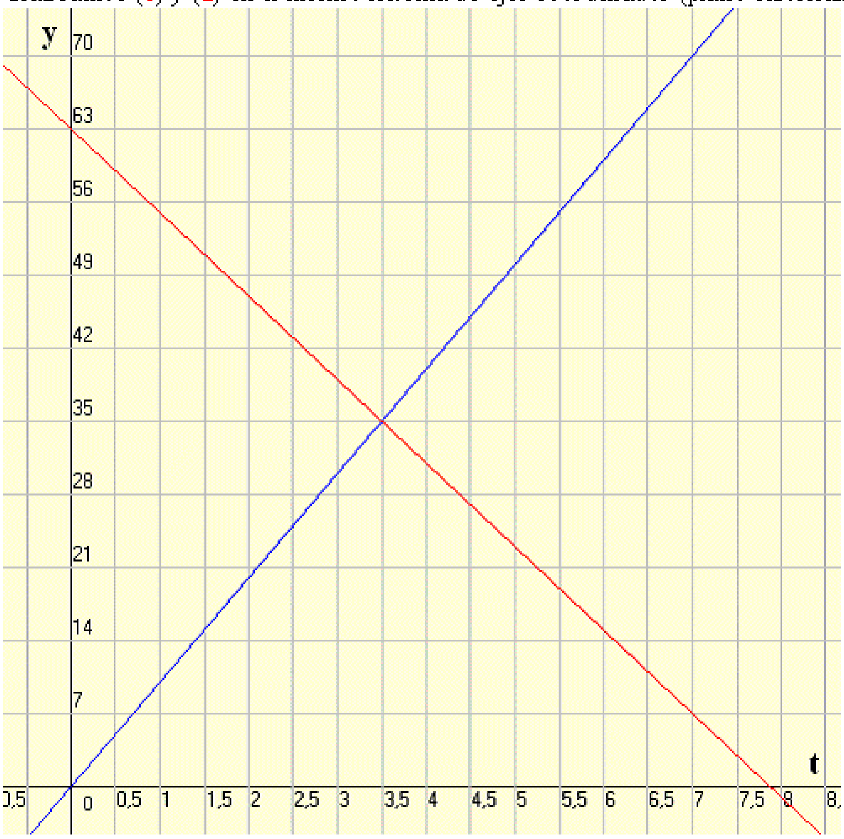
$$y = 10t \qquad (1)$$

- Para el hombre que sale de M, en su encuentro con el que sale de O, la distancia recorrida va a ser de (observe el esquema):

$$63 - y = 8t \Leftrightarrow y = 63 - 8t \qquad (2)$$



Graficamos (1) y (2) en el mismo sistema de ejes coordenados (plano cartesiano):

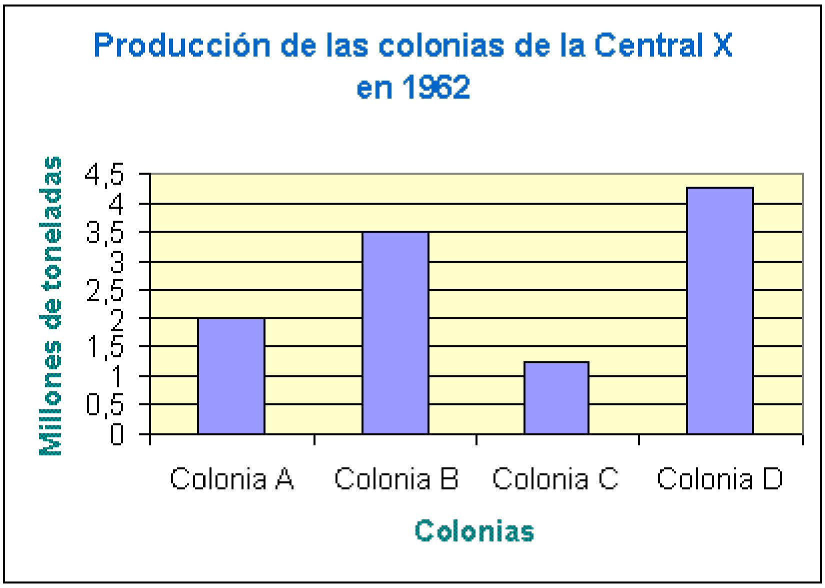


De la gráfica se deduce que los hombres se reúnen a una distancia de 35 Km. de *O* (28 Km. De *M*).
Se encuentran 3 horas y media después de iniciar la caminata, y como iniciaron su recorrido a las 11 A.m., dicha reunión se efectúa a las 2:30 P.m.

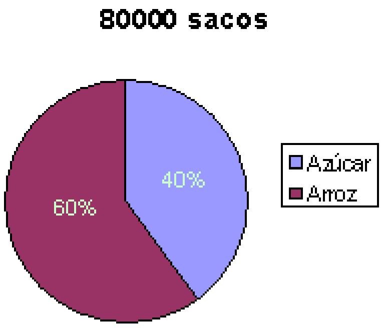
Gráficas. Aplicaciones prácticas

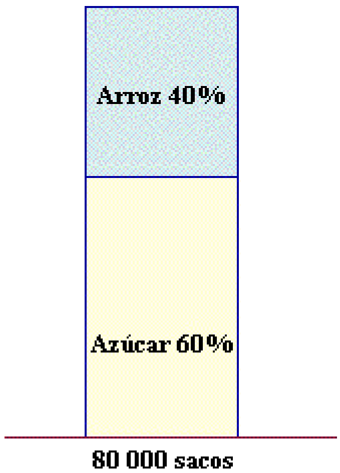
Los siguientes gráficos fueron elaborados con *Microsoft Excel*:

1. Exprese por medio de barras horizontales o verticales que en 1962 las colonias del Central X produjeron: la colonia A, 2 millones de arrobas; la colonia B, 3 millones y medio; la colonia C, un millón y cuarto; y la colonia D, 4 millones y cuarto.
Solución:

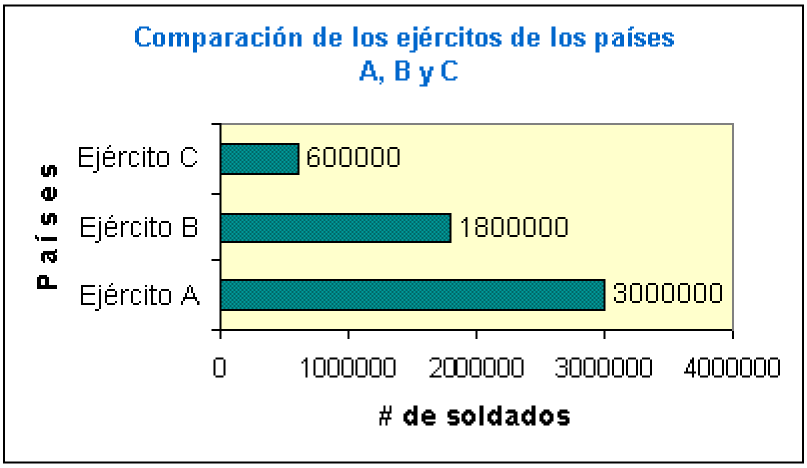


3. Exprese por medio de sectores circulares y de barras que de 80000 sacos de mercancías que tiene un almacén, el 40 % son de azúcar y el resto de arroz.
Solución:





5. Exprese por medio de barras horizontales que el ejército del país A tiene 3 millones de hombres, el de B 1'800.000, y el de C 600.000
Solución:



173

Ecuaciones indeterminadas

Resolución de una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Soluciones enteras y positivas

Procedimiento

1. Despejamos una cualquiera de las incógnitas en términos de la otra
2. Damos valores enteros positivos a la incógnita no despejada y de tal forma que el valor correspondiente de la otra incógnita resulte un entero positivo

Hallar todas las soluciones enteras y positivas de:

1. $x + y = 5$

Solución:

$$x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x \qquad \{\text{despejando } y \text{ en tèrminos de } x\} \quad (1)$$

Para que y de un valor entero positivo, x debe tomar los valores: 1, 2, 3 y 4

Veamos, para:

$x = 1$, (1) queda $y = 5 - 1 = 4$

$x = 2$, (1) queda $y = 5 - 2 = 3$

$x = 3$, (1) queda $y = 5 - 3 = 2$

$x = 4$, (1) queda $y = 5 - 4 = 1$

$S = \{(x, y) : (1,4), (2,3), (3,2), (1,4)\}$.

2. $2x + 3y = 37$

Solución:

$$2x + 3y = 37 \Leftrightarrow y = \frac{37 - 2x}{3} \qquad \{\text{despejando } y \text{ en tèrminos de } x\} \quad (1),$$

Como y es un entero, el miembro derecho de (1) también es un entero; esto es

$$\frac{37 - 2x}{3}: \text{ entero},$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{37 - 2x}{3}\right) = \frac{74 - 4x}{3}: \text{ entero} \qquad \{\text{el producto de dos enteros es otro entero}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{72 + 2 - 3x - x}{3} = \frac{72}{3} - \frac{3x}{3} + \frac{2 - x}{3} = 24 - x + \frac{2 - x}{3}: \text{ entero} \quad (2)$$

De (2) concluimos que, como $24 - x$ es un entero, $\frac{2 - x}{3}$ también debe serlo. Si llamamos m a este entero, entonces $m = \frac{2 - x}{3} \Leftrightarrow 3m = 2 - x \Leftrightarrow x = 2 - 3m \qquad \{\text{despejando } x \text{ en términos de } m\} \quad (3)$

Sustituyendo (3) en (1), y operando, se obtiene:

$$y = \frac{37 - 2(2 - 3m)}{3} \Leftrightarrow y = \frac{37 - 4 + 6m}{3} \Leftrightarrow y = \frac{33 + 6m}{3} \Leftrightarrow y = 11 + 2m \quad (4)$$

Se tiene entonces que $2x + 3y = 37$ es un entero para

$$\begin{cases} x = 2 - 3m \\ y = 11 + 2m \end{cases}, \ m \text{ es un entero} \quad (5)$$

Para

$m = 0$	$x = 2$	$y = 11$
$m = -1$	$x = 5$	$y = 9$
$m = -2$	$x = 8$	$y = 7$
$m = -3$	$x = 11$	$y = 5$
$m = -4$	$x = 14$	$y = 3$
$m = -5$	$x = 17$	$y = 1$

$S = \{(x, y) : (2,11), (5,9), (8,7), (11,5), (14,3), (17,1)\}.$

3. $3x+5y=43$

Solución:

$$3x+5y=43 \Leftrightarrow y=\frac{43-3x}{5} \qquad \{\text{despejando } y \text{ en tèrminos de } x\} \quad (1),$$

Como y es un entero, el miembro derecho de (1) también es un entero; esto es

$$\frac{43-3x}{5}: \text{ entero,}$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{43-3x}{5}\right)=\frac{86-6x}{5}: \text{ entero} \qquad \{\text{el producto de dos enteros es otro entero}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{85+1-5x-x}{5}=\frac{85}{5}-\frac{5x}{5}+\frac{1-x}{5}=17-x+\frac{1-x}{5}: \text{ entero} \quad (2)$$

De (2) concluimos que, como $7-x$ es un entero, $\frac{1-x}{5}$ también debe serlo. Si llamamos m a este entero, entonces $m=\frac{1-x}{5} \Leftrightarrow 5m=1-x \Leftrightarrow x=1-5m \qquad \{\text{despejando } x \text{ en términos de } m\} \quad (3)$

Sustituyendo (3) en (1), y operando, se obtiene:

$$y=\frac{43-3(1-5m)}{5} \Leftrightarrow y=\frac{43-3+15m}{5} \Leftrightarrow y=\frac{40+15m}{5} \Leftrightarrow y=8+3m \quad (4)$$

Se tiene entonces que $3x+5y=43$ es un entero para

$$\begin{cases} x=1-5m \\ y=8+3m \end{cases}, \ m \text{ es un entero} \quad (5)$$

Para

$m=0$	$x=1$	$y=8$
$m=-1$	$x=6$	$y=5$
$m=-2$	$x=11$	$y=2$

$S=\{(x,y):(1,8),(6,5),(11,2)\}$.

174

Ecuaciones indeterminadas
Problemas sobre ecuaciones indeterminadas

1. De cuántos modos se pueden tener \$42 en billetes de \$2 y de #5?

suma de

Solución:

Sea

x: # de billetes de \$2

y: # de billetes de \$5

De tal modo que:

$$2x+5y=42 \quad (✚)$$

$$2x+5y=42 \Leftrightarrow y=\frac{42-2x}{5} \qquad \{\text{despejando } y \text{ en tèrminos de } x\} \quad (1)$$

Para que y de un valor entero positivo, x debe tomar los valores: 1, 6, 11 y 16

Veamos, para:

$x=1$, (1) queda $y=\frac{42-2(1)}{5}=\frac{42-2}{5}=\frac{40}{5}=8$

$x=2$, (1) queda $y=\frac{42-2(6)}{5}=\frac{42-12}{5}=\frac{30}{5}=6$

$x=3$, (1) queda $y=\frac{42-2(11)}{5}=\frac{42-22}{5}=\frac{20}{5}=4$

$x=4$, (1) queda $y=\frac{42-2(16)}{5}=\frac{42-32}{5}=\frac{10}{5}=2$

Respuesta: se pueden tener billetes de \$2 y de \$5 de 4 modos diferentes:
$$\begin{cases} \text{1 billete de \$2 y 8 de \$5} \\ \text{6 billete de \$2 y 6 de \$5} \\ \text{11 billete de \$2 y 4 de \$5} \\ \text{16 billete de \$2 y 2 de \$5} \end{cases}$$

Solución:

Sea

x: # que se multiplica por 5

y: # que se multilplica por 3

De tal modo que:

$5x + 3y = 62$ (✤)

$5x + 3y = 62 \Leftrightarrow y = \dfrac{62 - 5x}{3}$ {despejando y en tèrminos de x} (1)

Para que y de un valor entero positivo, x debe tomar los valores: 1, 4, 7 y 10

Veamos, para:

$x = 1$, (1) queda $y = \dfrac{62 - 5(1)}{3} = \dfrac{62 - 5}{3} = \dfrac{57}{3} = 19$

$x = 4$, (1) queda $y = \dfrac{62 - 5(4)}{3} = \dfrac{62 - 20}{3} = \dfrac{42}{3} = 14$

$x = 7$, (1) queda $y = \dfrac{62 - 5(7)}{3} = \dfrac{62 - 35}{3} = \dfrac{27}{3} = 9$

$x = 10$, (1) queda $y = \dfrac{62 - 5(10)}{3} = \dfrac{62 - 50}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$

Respuesta: los números pueden ser: $\begin{cases} 1 \text{ y } 19 \\ 4 \text{ y } 14 \\ 7 \text{ y } 9 \\ 10 \text{ y } 4 \end{cases}$

5. Un hombre dispone de \$42 para comprar tela de lana a \$1.50 el metro y tela de seda a \$2.50 el metro. ¿Cuántos metros enteros de lana y cuántos de seda puede comprar el hombre?.

Solución:

Sea

x: # de metros de tela de lana

y: # de metros de tela de seda

De tal modo que:

$1.5x + 2.5y = 42 \Leftrightarrow 3x + 5y = 84$ (✤)

$3x + 5y = 84 \Leftrightarrow y = \dfrac{84 - 3x}{5}$ {despejando y en tèrminos de x} (1)

Para que y de un valor entero positivo, x debe tomar los valores: 3, 8, 13, 18 y 23

Veamos, para:

$x = 3$, (1) queda $y = \dfrac{84 - 3(3)}{5} = \dfrac{84 - 9}{5} = \dfrac{75}{5} = 15$

$x = 8$, (1) queda $y = \dfrac{84 - 3(8)}{5} = \dfrac{84 - 24}{5} = \dfrac{60}{5} = 12$

$x = 13$, (1) queda $y = \dfrac{84 - 3(13)}{5} = \dfrac{84 - 39}{5} = \dfrac{45}{5} = 9$

$x = 18$, (1) queda $y = \dfrac{84 - 3(18)}{5} = \dfrac{84 - 54}{5} = \dfrac{30}{5} = 6$

$x = 23$, (1) queda $y = \dfrac{84 - 3(23)}{5} = \dfrac{84 - 69}{5} = \dfrac{15}{5} = 3$

Respuesta: el hombre puede comprar:
- 3 m de tela de lana y 15 m de seda
- 8 m de tela de lana y 12 m de seda
- 13 m de tela de lana y 9 m de seda
- 18 m de tela de lana y 6 m de seda
- 23 m de tela de lana y 3 m de seda

8. El triplo de un número aumentado en 3 equivale al quintuplo de otro aumentado en 5. Hallar los menores números positivos que cumplen está condición.

Solución:

Sea

x: un # natural

$3x + 3$: triplo del # aumentado en 3 unidades

y: otro # natural

$5y + 5$: quintuplo del # aumentado en 5

De tal modo que:

$3x + 3 = 5y + 5 \Leftrightarrow 3x - 5y = 2$ (✤)

$3x - 5y = 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{3x - 2}{5}$ {despejando y en tèrminos de x} (1)

Para que y de un valor entero positivo, x debe tomar los valores: 4, 9, 14, ..., $5n - 1$: $n \in \mathbb{N}$.

El menor de estos valores es 4; y, para:

$x = 4$, (1) queda $y = \dfrac{3(4) - 2}{5} = \dfrac{12 - 2}{5} = \dfrac{10}{2} = 2$

Respuesta: los menores números enteros positivos que cumplen las condiciones estipuladas son 4 y 2.

Representación gráfica de una ecuación lineal

Procedimiento

Para representar gráficamente una ecuación lineal se tiene encuenta que "toda ecuación de primer grado con dos variables representa una línea recta", y se procede de la siguiente manera:

1. Se despeja a *y* en función de *x*
2. Se calculan los valores correspondientes de *y* para dos valores arbitrarios de *x* (es preferible hallar los interceptos con los ejes, para lo cual se calcula el valor de *y* cuando *x* es 0 (intercepto con el eje*y*), y se da un valor a *x* de tal forma que el valor para *y* sea 0 (intercepto con el eje*x*)
3. Se construye una tabla de valores con los datos obtenidos en el paso anterior
4. Se ubican y señalan en el plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas hallamos con anterioridad
5. Se unen mediante una línea recta los puntos señalados en el plano

Para hallar la intesección, el punto donde se cortan, de dos rectas en el plano cartesiano, se trazan las gráficas de las dos ecuaciones e, interpolando, se obtienen las coordenadas del punto común.

Representar gráficamente las siguientes ecuaciones:

1. $x - y = 0$

Solución:

Despejando a y en términos de x, se obtiene:

$$x - y = 0 \Leftrightarrow y = x \qquad (1)$$

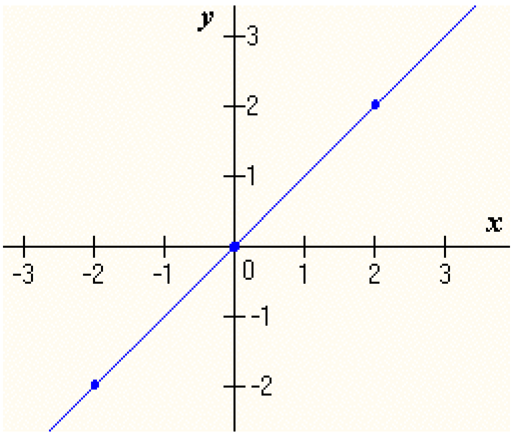
Se tiene, a partir de (1), que para:

$x = -2,\ y = -2$

$x = 0,\ y = 0$

$x = 2,\ y = 2$

x	–2	0	2
y	–2	0	2



2. $x + y = 5$

Solución:

Despejando a y en términos de x, se obtiene:

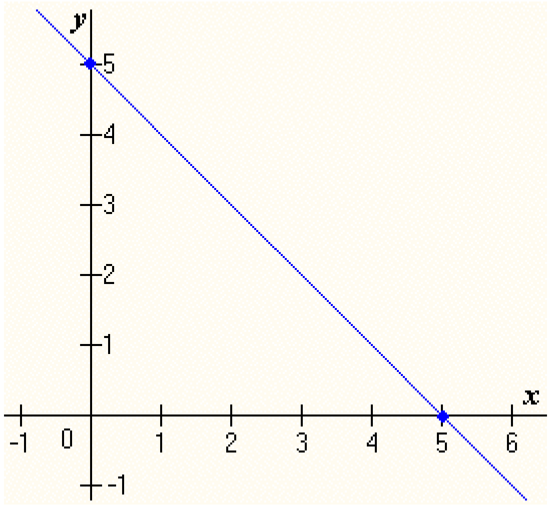
$$x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x \quad (1)$$

Se tiene, a partir de (1), que para:

$x = 0,\ y = 5 - 0 = 5$

$x = 5,\ y = 5 - 5 = 0$

x	0	5
y	5	0



8. $x + 6 = 0$

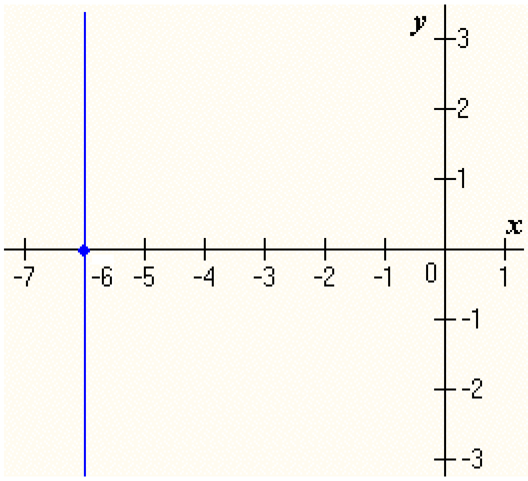
Solución:

$$x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

En este caso, para todo y, $x = -6$;

la gráfica es una recta paralela al eje y que corta al eje x en -6

x	-6	-6	-6
y	...	0	...



9. $y - 7 = 0$

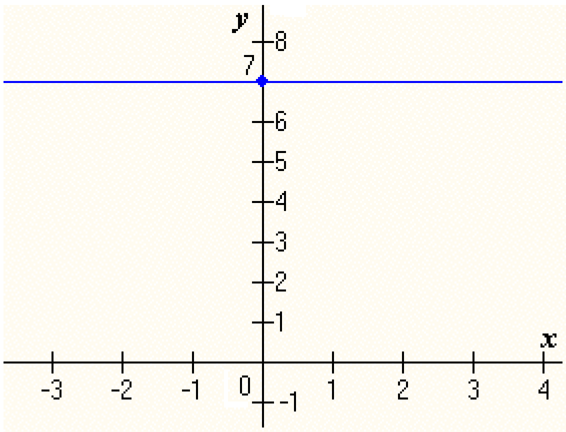
Solución:

$$y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = 7$$

En este caso, para todo x, $y = 7$;

la gráfica es una recta paralela al eje x que corta al eje y en 7

x	...	0	...
y	7	7	7



17. $9x + 2y = -12$

Solución:

Despejando a y en términos de x, se obtiene:

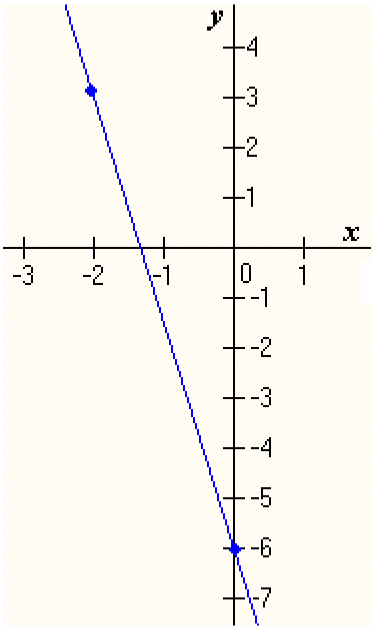
$$9x + 2y = -12 \Leftrightarrow y = -\frac{9}{2}x - 6 \quad (1)$$

Se tiene, a partir de (1), que para:

$$x = -2,\ \ y = -\frac{9}{2}(-2) - 6 = 9 - 6 = 3$$

$$x = 0,\ \ y = -\frac{9}{2}(0) - 6 = 0 - 6 = -6$$

x	–2	0
y	3	–6



Hallar la intersección de:

23. $x - y = 2$ con $3x + y = 18$

Solución:

Despejando a y en términos de x, en ambas ecuaciones, se obtiene:

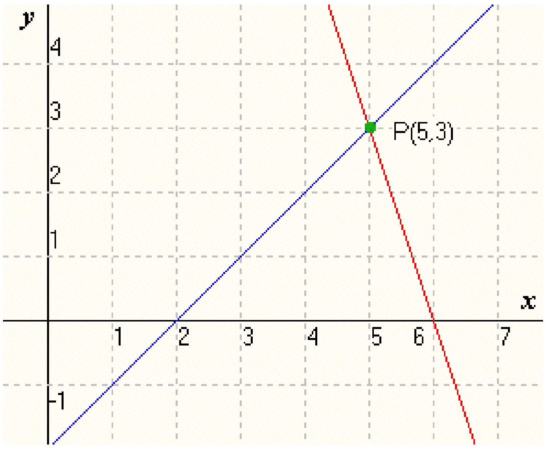
$$x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2 \quad (1)$$

$$3x + y = 18 \Leftrightarrow y = 18 - 3x \quad (2)$$

Se tiene, a partir de (1); y a partir de (2), que para:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2,\ \ y = 0 \\ x = 6,\ \ y = 4 \end{array}\right\}:\ \text{puntos de } y = x - 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5,\ \ y = 3 \\ x = 6,\ \ y = 0 \end{array}\right\}:\ \text{puntos de } y = 18 - 3x$$



Interpolando, hallamos que las rectas se intersectan en el punto P(5,3).

Ecuaciones Simultáneas de primer grado

I. Eliminación por igualación

Procedimiento

1. Se ordenan (alfabéticamente) y nombran las ecuaciones
2. Se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones.
3. Se igualan entre sí las expresiones de la incógnita despejada en el paso anterior
4. Se resuelve la ecuación resultante (ecuación de una incógnita).
5. El valor numérico obtenido para la incógnita que estamos resolviendo, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales, obteniendo así el valor numérico de la otra incógnita.

Resolver por el método de igualación:

1. $\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$

Solución:

Nombramos las ecuaciones

$$x + 6y = 27 \quad (1)$$
$$7x - 3y = 9 \quad (2)$$

Despejamos x en ambas ecuaciones

$$x + 6y = 27 \Leftrightarrow x = 27 - 6y \quad (3)$$
$$7x - 3y = 9 \Leftrightarrow 7x = 9 + 3y \Leftrightarrow x = \frac{9 + 3y}{7} \quad (4)$$

Igualamos (3) y (4):

$$27 - 6y = \frac{9 + 3y}{7} \qquad \{\text{pués } x = x\},$$

$\Rightarrow \quad 189 - 42y = 9 + 3y \quad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 7},

$\Rightarrow \quad -42y - 3y = 9 - 189 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -45y = -180 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad y = 4 \quad$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por -45} $\quad (5)$

Sustituimos (5) en (1):

$$x + 6(4) = 27 \Leftrightarrow x + 24 = 27;$$

$\therefore \quad x = 3 \quad$ {restando 24 en ambos miembros}.

Respuesta: $\quad s = \begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases}$

Solución:

Nombramos las ecuaciones

$$3x - 2y = -2 \quad (1)$$

$$5x + 8y = -60 \quad (2)$$

Despejamos x en ambas ecuaciones

$$3x - 2y = -2 \Leftrightarrow 3x = -2 + 2y \Leftrightarrow x = \frac{-2 + 2y}{3} \quad (3)$$

$$5x + 8y = -60 \Leftrightarrow 5x = -60 - 8y \Leftrightarrow x = \frac{-60 - 8y}{5} \quad (4)$$

Igualamos (3) y (4):

$$\frac{-2 + 2y}{3} = \frac{-60 - 8y}{5} \quad \{\text{pués } x = x\},$$

$\Rightarrow \quad -10 + 10y = -180 - 24y \quad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 15, el M.C.D.},

$\Rightarrow \quad 10y + 24y = -180 + 10 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad 34y = -170 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad y = -5 \quad$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por 34} $\quad (5)$

Sustituimos (5) en (1):

$$3x - 2(-5) = -2 \Leftrightarrow 3x + 10 = -2 \Leftrightarrow 3x = -12;$$

$\therefore \quad x = -4 \quad$ {dividiendo cada miembro por 3}.

Respuesta: $\quad s = \begin{cases} x = -4 \\ y = -5. \end{cases}$

177

Ecuaciones Simultáneas de primer grado

II. Eliminación por sustitución

Procedimiento
1. Se ordenan (alfabéticamente) y nombran las ecuaciones **2.** Se despeja una de las incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones. **3.** El valor de la incógnita despejada se sustituye en la otra ecuación. **4.** Se resuelve la ecuación resultante (ecuación de una incógnita). **5.** El valor numérico obtenido para la incógnita que estamos resolviendo, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales, obteniendo así el valor numérico de la otra incógnita.

Resolver por sustitución:

1. $\begin{cases} x+3y=6 \\ 5x-2y=13 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombremos las ecuaciones:

$$x+3y=6 \qquad (1)$$
$$5x-2y=13 \qquad (2)$$

Despejemos x en (1):

$x+3y=6,$

$\Rightarrow \quad x=6-3y \qquad (3)$

Sustituyamos (3) en (2):

$5(6-3y)-2y=13,$

$\Rightarrow \quad 30-15y-2y=13,$

$\Rightarrow \quad 30-17y=13,$

$\Rightarrow \quad -17y=-17$ {restando 30 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad y=1$ {dividiendo por -17 ambos miembros de la igualdad} (4)

Sustituyamos (4) en (1):

$x+3(1)=6,$

$\Rightarrow \quad x+3=6;$

$\therefore \quad x=3$ {restando 3 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: $x=3$ e $y=1$.

2. $\begin{cases} 5x+7y=-1 \\ -3x+4y=-24 \end{cases}$

Nombremos las ecuaciones:

$$5x+7y=-1 \qquad (1)$$
$$-3x+4y=-24 \qquad (2)$$

Despejemos x en (1):

$5x+7y=-1,$

$\Rightarrow \quad 5x=-1-7y,$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{-1-7y}{5} \qquad (3)$

Sustituyamos (3) en (2):

$-3\left(\dfrac{-1-7y}{5}\right)+4y=-24,$

$\Rightarrow \quad 3+21y+20y=-120$ {destruyendo paréntesis y multiplicando cada término por 5},

$\Rightarrow \quad 41y=-123$ {reduciendo términos semejantes};

$\therefore \quad y=-3$ {dividiendo por 41 ambos miembros de la igualdad} (4)

Sustituyamos (4) en (1):

$5x+7(-3)=-1,$

$\Rightarrow \quad 5x-21=-1,$

$\Rightarrow \quad 5x=20$ {sumando 21 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad x=4$ {dividiendo por 41 ambos miembros de la igualdad}.

Respuesta: $x=4$ e $y=-3$.

3. $\begin{cases} 4y + 3x = 8 \\ 8x - 9y = -77 \end{cases}$

Ordenamos y nombremos las ecuaciones:

$$3x + 4y = 8 \qquad (1)$$
$$8x - 9y = -77 \qquad (2)$$

Despejemos x en (1):

$$3x + 4y = 8,$$
$$\Rightarrow \quad 3x = 8 - 4y,$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{8-4y}{3} \qquad (3)$$

Sustituyamos (3) en (2):

$$8\left(\frac{8-4y}{3}\right) - 9y = -77,$$
$\Rightarrow \quad 64 - 32y - 27y = -231$ {destruyendo paréntesis y multiplicando cada término por 3},
$\Rightarrow \quad -59y = -295$ {reduciendo términos semejantes};
$\therefore \quad y = 5$ {dividiendo por -59 ambos miembros de la igualdad} (4)

Sustituyamos (4) en (1):

$$3x + 4(5) = 8,$$
$$\Rightarrow \quad 3x + 20 = 8,$$
$\Rightarrow \quad 3x = -12$ {restando 20 unidades en ambos miembros de la ecuación};
$\therefore \quad x = -4$ {dividiendo por 3 ambos miembros de la igualdad}.

Respuesta: $x = -4$ e $y = 5$.

4. $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

Nombremos las ecuaciones:

$$x - 5y = 8 \qquad (1)$$
$$-7x + 8y = 25 \qquad (2)$$

Despejemos x en (1):

$$x - 5y = 8,$$
$$\Rightarrow \quad x = 8 + 5y, \qquad (3)$$

Sustituyamos (3) en (2):

$$-7(8 + 5y) + 8y = 25,$$
$\Rightarrow \quad -56 - 35y + 8y = 25$ {destruyendo paréntesis},
$\Rightarrow \quad -27y = 81$ {reduciendo términos semejantes};
$\therefore \quad y = -3$ {dividiendo por -27 ambos miembros de la igualdad} (4)

Sustituyamos (4) en (1):

$$x - 5(-3) = 8,$$
$$\Rightarrow \quad x + 15 = 8;$$
$\therefore \quad x = -7$ {restando 15 unidades en ambos miembros de la ecuación}.

Respuesta: $x = -7$ e $y = -3$.

5. $\begin{cases} 15x + 11y = 32 \\ 7y - 9x = 8 \end{cases}$

Ordenemos y nombremos las ecuaciones:

$$15x + 11y = 32 \qquad (1)$$

$$-9x + 7y = 8 \qquad (2)$$

Despejemos x en (1):

$$15x + 11y = 32,$$

$\Rightarrow \quad 15x = 32 - 11y$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{32 - 11y}{15}, \qquad (3)$

Sustituyamos (3) en (2):

$$-9\left(\frac{32 - 11y}{15}\right) + 7y = 8,$$

$\Rightarrow \quad -96 + 33y + 35y = 40$ {destruyendo paréntesis (previamente sacando tercera a 9 y a15) y multiplicando cada término por 5},

$\Rightarrow \quad 68y = 136$ {reduciendo términos semejantes};

$\therefore \quad y = 2$ {dividiendo por 68 ambos miembros de la igualdad} (4)

Sustituyamos (4) en (1):

$$15x + 11(2) = 32,$$

$\Rightarrow \quad 15x + 22 = 32,$

$\Rightarrow \quad 15x = 10$ {restando 22 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad x = \dfrac{2}{3}$ {dividiendo por 15 ambos miembros y simplificando}.

Respuesta: $x = \dfrac{2}{3}$ e $y = 2$.

6. $\begin{cases} 10x + 18y = -11 \\ 16x - 9y = -5 \end{cases}$

Ordenemos y nombremos las ecuaciones:

$$10x + 18y = -11 \qquad (1)$$

$$16x - 9y = -5 \qquad (2)$$

Despejemos x en (1):

$$10x + 18y = -11,$$

$$\Rightarrow \quad 10x = -11 - 18y$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-11 - 18y}{10}, \qquad (3)$$

Sustituyamos (3) en (2):

$$16\left(\frac{-11 - 18y}{10}\right) - 9y = -5,$$

$\Rightarrow \quad -88 - 144y - 45y = -25$ {destruyendo paréntesis (previamente sacando mitad a 16 y a10) y multiplicando cada término por 5},

$\Rightarrow \quad -189y = 63$ {reduciendo términos semejantes};

$\therefore \quad y = -\frac{1}{3}$ {dividiendo por -189 ambos miembros de la igualdad y simplificando} (4)

Sustituyamos (4) en (1):

$$10x + 18\left[-\frac{1}{3}\right] = -11,$$

$$\Rightarrow \quad 10x - 6 = -11,$$

$\Rightarrow \quad 10x = -5$ {sumando 6 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad x = -\frac{1}{2}$ {dividiendo por 10 ambos miembros y simplificando}.

Respuesta: $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{3}$.

7. $\begin{cases} 4x + 5y = 5 \\ -10y - 4x = -7 \end{cases}$

Ordenemos y nombremos las ecuaciones:

$$4x + 5y = 5 \qquad (1)$$
$$-4x - 10y = -7 \qquad (2)$$

Despejemos x en (1):

$$4x + 5y = 5,$$
$$\Rightarrow \quad 4x = 5 - 5y$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{5 - 5y}{4}, \qquad (3)$$

Sustituyamos (3) en (2):

$$-4\left(\frac{5 - 5y}{4}\right) - 10y = -7,$$
$$\Rightarrow \quad -5 + 5y - 10y = -7 \qquad \{\text{destruyendo paréntesis (previamente simplificando)},$$
$$\Rightarrow \quad -5y = -2 \qquad \{\text{reduciendo términos semejantes}\};$$
$$\therefore \quad y = \frac{2}{5} \qquad \{\text{dividiendo por } -5 \text{ ambos miembros de la igualdad y simplificando}\} \qquad (4)$$

Sustituyamos (4) en (1):

$$4x + 5\left(\frac{2}{5}\right) = 5,$$
$$\Rightarrow \quad 4x + 2 = 5,$$
$$\Rightarrow \quad 4x = 3 \qquad \{\text{restando 2 unidades en ambos miembros de la ecuación}\};$$
$$\therefore \quad x = \frac{3}{4} \qquad \{\text{dividiendo por 10 ambos miembros y simplificando}\}.$$

Respuesta: $x = \frac{3}{4}$ e $y = \frac{2}{5}$.

8. $\begin{cases} 32x - 25y = 13 \\ 16x + 15y = 1 \end{cases}$

Nombremos las ecuaciones:

$$32x - 25y = 13 \qquad (1)$$

$$16x + 15y = 1 \qquad (2)$$

Despejemos x en (1):

$$32x - 25y = 13,$$

$$\Rightarrow \quad 32x = 13 + 25y,$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{13 + 25y}{32}, \qquad (3)$$

Sustituyamos (3) en (2):

$$16\left(\frac{13 + 25y}{32}\right) + 15y = 1,$$

$\Rightarrow \quad 13 + 25y + 30y = 2$ {destruyendo paréntesis (previamente simplificando),

$\Rightarrow \quad 55y = -11$ {reduciendo términos semejantes};

$\therefore \quad y = -\frac{1}{5}$ {dividiendo por 55 ambos miembros de la igualdad y simplificando} (4)

Sustituyamos (4) en (1):

$$32x - 25\left(-\frac{1}{5}\right) = 13,$$

$$\Rightarrow \quad 32x + 5 = 13,$$

$\Rightarrow \quad 32x = 8$ {restando 5 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad x = \frac{1}{4}$ {dividiendo por 32 ambos miembros y simplificando}.

Respuesta: $x = \frac{1}{4}$ e $y = -\frac{1}{5}$.

9. $\begin{cases} -13y + 11x = -163 \\ -8x + 7y = 94 \end{cases}$

Ordenemos y nombremos las ecuaciones:

$$11x - 13y = -163 \qquad (1)$$

$$-8x + 7y = 94 \qquad (2)$$

Despejemos x en (1):

$$11x - 13y = -163,$$

$$\Rightarrow \quad 11x = -163 + 13y,$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-163 + 13y}{11}, \qquad (3)$$

Sustituyamos (3) en (2):

$$-8\left(\frac{-163 + 13y}{11}\right) + 7y = 94,$$

$\Rightarrow \quad 1304 - 104y + 77y = 1034$ {destruyendo paréntesis y multiplicando la ecuación por 11},

$\Rightarrow \quad -27y = -270$ {reduciendo términos semejantes};

$\therefore \quad y = 10$ {dividiendo por -27 ambos miembros de la igualdad y simplificando} (4)

Sustituyamos (4) en (1):

$$11x - 13(10) = -163,$$

$$\Rightarrow \quad 11x - 130 = -163,$$

$\Rightarrow \quad 11x = -33$ {sumando 130 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad x = -3$ {dividiendo por 11 ambos miembros y simplificando}.

Respuesta: $x = -3$ e $y = 10$.

3. $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

Solución:

Nombramos las ecuaciones

$$3x + 5y = 7 \quad (1)$$

$$2x - y = -4 \quad (2)$$

Despejamos x en ambas ecuaciones

$$3x + 5y = 7 \Leftrightarrow 3x + 5y = 7 - 5y \Leftrightarrow x = \frac{7 - 5y}{3} \quad (3)$$

$$2x - y = -4 \Leftrightarrow 2x = -4 + y \Leftrightarrow x = \frac{-4 + y}{2} \quad (4)$$

Igualamos (3) y (4):

$$\frac{7 - 5y}{3} = \frac{-4 + y}{2} \qquad \{\text{pués } x = x\},$$

$\Rightarrow \quad 14 - 10y = -12 + 3y \quad$ {multiplicando cada término de la ecuación por 6, el M.C.D.},

$\Rightarrow \quad -10y - 3y = -12 - 14 \quad$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -13y = -26 \quad$ {reduciendo};

$\therefore \quad y = 2 \quad$ {dividiendo cada miembro de la ecuación por -13} (5)

Sustituimos (5) en (2):

$$2x - 2 = -4 \Leftrightarrow 2x = -2;$$

$\therefore \quad x = -1 \quad$ {dividiendo cada miembro por 2}.

Respuesta: $s = \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$

Ecuaciones Simultáneas de primer grado

III. Método de reducción

Resolver por suma o resta:

P r o c e d i m i e n t o

1. Se ordenan (alfabéticamente) y nombran las ecuaciones
2. Se halla el M.C.M (mínimo común múltiplo) de los coeficientes de alguna de las incógnitas
3. Dividimos el M.C.M por cada uno de los coeficientes de la letra escogida y el cociente lo multiplicams por dicho coeficiente
4. Se suman o restan las ecuaciones, dependiendo de si los coeficientes tienen diferente signo o igual signo
5. Se despeja la incógnita de la ecuación resultante
6. Se sustituye el valor numérico de la incógnita, obtenido en el paso anterior, en cualquiera de las dos ecuaciones originales
7. Se halla el valor de la segunda incógnita
Nota1: la simbología utilizada para denotar el mínimo común múltiplo, c, de los dos números, a y b, es la siguiente: $[a, b] = c$.

1. $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$

<u>S o l u c i ó n</u> :

Nombremos las ecuaciones:

$$6x - 5y = -9 \qquad (1)$$
$$4x + 3y = 13 \qquad (2)$$

Vamos a eliminar la y. $[3,\ 5] = 15$; multiplicamos la ecuación (1) por 3 y la (2) por 5, y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{l} 18x - 15y = -27 \\ \underline{20x + 15y = \ 65} \\ 38x \qquad\ = \ 38; \end{array}$$

$\therefore \quad x = 1 \qquad$ {dividiendo ambos miembros por 38} $\qquad$ (3)

Sustituyamos (3) en (2):

$$4(1) + 3y = 13,$$

$\Rightarrow \quad 4 + 3y = 13,$

$\Rightarrow \quad 3y = 9 \qquad$ {restando 30 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad y = 3 \qquad$ {dividiendo por 3 ambos miembros de la igualdad}

Respuesta: $x = 1$ e $y = 3$.

2. $\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$

<u>S o l u c i ó n</u> :

Nombremos las ecuaciones:

$$7x - 15y = 1 \qquad (1)$$
$$-x - 6y = 8 \qquad (2)$$

Vamos a eliminar la x. $[1,\ 7] = 7$; multiplicamos la ecuación (2) por 7,

y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{l} \ \ 7x - 15y = \ 1 \\ \underline{-7x - 42y = 56} \\ \qquad -57y = 57; \end{array}$$

$\therefore \quad y = -1 \qquad$ {dividiendo ambos miembros por 57} $\qquad$ (3)

Sustituyamos (3) en (2):

$$-x - 6(-1) = 8,$$

$\Rightarrow \quad -x + 6 = 8,$

$\Rightarrow \quad -x = 2 \qquad$ {restando 6 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad x = -2 \qquad$ {multilplicando por -1 ambos miembros de la igualdad}

Respuesta: $x = -2$ e $y = -1$.

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$

<u>Solución</u> :

Nombremos las ecuaciones:

$3x - 4y = 41 \qquad (1)$

$11x + 6y = 47 \qquad (2)$

Vamos a eliminar la y. $[4,\ 6] = 12$; multiplicamos la ecuación (1) por 3 y la (2) por 2, y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{l} \ \ 9x - 12y = 123 \\ \underline{22x + 12y = \ \ 94} \\ 31x \qquad\quad = 217; \end{array}$$

$\therefore \quad x = 7 \qquad$ {dividiendo ambos miembros por 31} $\qquad (3)$

Sustituyamos (3) en (2):

$11(7) + 6y = 47,$

$\Rightarrow \quad 77 + 6y = 47,$

$\Rightarrow \quad 6y = -30 \qquad$ {restando 77 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad y = -5 \qquad$ {dividiendo por 6 ambos miembros de la igualdad}

Respuesta: $x = 7$ e $y = -5$.

4. $\begin{cases} 9x + 11y = -14 \\ 6x - 5y = -34 \end{cases}$

<u>Solución</u> :

Nombremos las ecuaciones:

$9x + 11y = -14 \qquad (1)$

$6x - 5y = -34 \qquad (2)$

Vamos a eliminar la y. $[5,\ 11] = 55$; multiplicamos la ecuación (1) por 5 y la (2) por 11, y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{l} \ 45x + 55y = -\ 70 \\ \underline{\ 66x - 55y = -374} \\ 111x \qquad\quad = -444; \end{array}$$

$\therefore \quad x = -4 \qquad$ {dividiendo ambos miembros por 111} $\qquad (3)$

Sustituyamos (3) en (1):

$9(-4) + 11y = -14,$

$\Rightarrow \quad -36 + 11y = -14,$

$\Rightarrow \quad 11y = 22 \qquad$ {sumando 36 unidades en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad x = 2 \qquad$ {dividiendo por 11 ambos miembros de la igualdad}

Respuesta: $x = -4$ e $y = 2$.

5. $\begin{cases} 10x - 3y = 36 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombremos las ecuaciones:

$$10x - 3y = 36 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = -4 \qquad (2)$$

Vamos a eliminar la x. $[2,\ 10] = 10$; multiplicamos la ecuación (2) por 5,
y restamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{r} 10x \;\; - 3y = 36 \\ -10x - 25y = 20 \\ \hline -28y = 56; \end{array}$$

$\therefore \quad y = -2 \qquad \{\text{dividiendo ambos miembros por } -28\} \qquad (3)$

Sustituyamos (3) en (2):

$$2x + 5(-2) = -4,$$

$\Rightarrow \quad 2x - 10 = -4,$

$\Rightarrow \quad 2x = 6 \qquad \{\text{sumando 10 unidades en ambos miembros de la ecuación}\};$

$\therefore \quad x = 3 \qquad \{\text{dividiendo por 2 ambos miembros de la igualdad}\}$

Respuesta: $x = 3$ e $y = -2$.

6. $\begin{cases} 11x - 9y = 2 \\ 13x - 15y = -2 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombremos las ecuaciones:

$$11x - 9y = 2 \qquad (1)$$

$$13x - 15y = -2 \qquad (2)$$

Vamos a eliminar la y. $[9,\ 15] = 45$; multiplicamos la ecuación (1) por 5 y la (2) por 3,

y restamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{r} 55x - 45y = \;\; 10 \\ -39x + 45y = \;\;\; 6 \\ \hline 16x \qquad\;\; = \;\; 16; \end{array}$$

$\therefore \quad x = 1 \qquad \{\text{dividiendo ambos miembros por 16}\} \qquad (3)$

Sustituyamos (3) en (1):

$$11(1) - 9y = 2,$$

$\Rightarrow \quad 11 - 9y = 2,$

$\Rightarrow \quad -9y = -9 \qquad \{\text{restando 11 unidades en ambos miembros de la ecuación}\};$

$\therefore \quad y = 1 \qquad \{\text{dividiendo por } -9 \text{ ambos miembros de la igualdad}\}$

Respuesta: $x = 1$ e $y = 1$.

Ecuaciones Simultáneas de primer grado

Resolución de sistemas numéricos de dos ecuaciones enteras con dos incógnitas

P r o c e d i m i e n t o

1. Se llevan las ecuaciones a la forma $ax + by = c$
2. Se halla el M.C.M (mínimo común múltiplo) de los coeficientes de alguna de las incógnitas
3. Dividimos el M.C.M por cada uno de los coeficientes de la letra escogida y el cociente lo multiplicams por dicho coeficiente
4. Se suman o restan las ecuaciones, dependiendo de si los coeficientes tienen diferente signo o igual signo
5. Se despeja la incógnita de la ecuación resultante
6. Se sustituye el valor numérico de la incógnita, obtenido en el paso anterior, en cualquiera de las dos ecuaciones originales
7. Se halla el valor de la segunda incógnita
Nota1: la simbología utilizada para denotar el mínimo común múltiplo, c, de los dos números, a y b, es la siguiente: $[a, b] = c$.

Resolver los siguentes sistemas:

1. $\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$

Solución:

$$\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 7y = -9 + 5 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases} \quad \{\text{transponiendo}\},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 7y = -4 & (1) \\ 6x - 3y = 6 & (2) \end{cases} \quad \{\text{reduciendo y nombrando las ecuaciones}\},$$

$[6, 8] = 24$; multiplicamos la ecuación (1) por -3 y la (2) por 4, y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{r} -24x + 21y = 12 \\ 24x - 12y = 24 \\ \hline 9y = 36; \end{array}$$

$\therefore \quad y = 4 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 4} $\quad (3)$

Sustituimos (3) en (2):

$6x - 3(4) = 6,$

$\Rightarrow \quad 6x - 12 = 6,$

$\Rightarrow \quad 6x = 18 \quad$ {sumando 12 en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad x = 3 \quad$ {dividiendo por 6 ambos miembros}

Respuesta: $x = 3$, $y = 4$.

2. $\begin{cases} x-1=y+1 \\ x-3=3y-7 \end{cases}$

Solución:

$$\begin{cases} x-1=y+1 \\ x-3=3y-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1+1 \\ x-3y=-7+3 \end{cases} \quad \{\text{transponiendo}\},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=y+1 \\ x-3=3y-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 & (1) \\ x-3y=-4 & (2) \end{cases} \quad \{\text{reduciendo y nombrando las ecuaciones}\},$$

Multiplicamos la ecuación (2) por -1 y la sumamos con la (1):

$$\begin{array}{r} x \quad -y = 2 \\ \underline{-x+3y=4} \\ 2y=6; \end{array}$$

$\therefore \quad y=3 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} $\quad (3)$

Sustituimos (3) en (1):

$$x-3=2;$$

$\therefore \quad x=5 \quad$ {sumando 3 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: $x=5$, $y=2$.

3. $\begin{cases} 3(x+2)=2y \\ 2(y+5)=7x \end{cases}$

Solución:

$$\begin{cases} 3(x+2)=2y \\ 2(y+5)=7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6=2y \\ 2y+10=7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-6 & (1) \\ -7x+2y=-10 & (2) \end{cases} \quad \{\text{transponiendo}\},$$

Sumamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 3x-2y = \quad -6 \\ \underline{-7x+2y=-10} \\ -4x \qquad = -16; \end{array}$$

$\therefore \quad x=4 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -4} $\quad (3)$

Sustituimos (3) en (2):

$$-7(4)+2y=-10,$$

$\Rightarrow \quad -28+2y=-10,$

$\Rightarrow \quad 2y=18 \quad$ {sumando 28 en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad y=9 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2}

Respuesta: $x=4$, $y=9$.

Resolución de sistemas numéricos de dos ecuaciones fraccionarias con dos incógnitas

P r o c e d i m i e n t o

1. Se nombran las ecuaciones
2. Se halla el M.C.D en ambas ecuaciones
3. Se suprimen los denominadores multiplicando cada término de la ecuación por su respectivo mínino común denominador M.C.D.
4. Se ordenan las ecuaciones
5. Se resuelven las ecuaciones por el Método de Reducción (ver Ejercicio 178)

Resolver los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} \dfrac{3x}{2} + y = 11 \\ x + \dfrac{y}{2} = 7 \end{cases}$

Solución-Juan Beltrán:

Nombramos las ecuaciones:

$$\frac{3x}{2} + y = 11 \qquad (1)$$

$$x + \frac{y}{2} = 7 \qquad (2)$$

Multiplicamos ambas ecuaciones por 2:

$$3x + 2y = 22 \qquad (3)$$

$$2x + y = 14 \qquad (4)$$

Multiplicamos la ecuación (4) por -2, y la ecuación resultante, la (5), la sumamos con la (3):

$$\begin{array}{rcrl} 3x + 2y & = & 22 & \quad (3) \\ -4x - 2y & = & -28 & \quad (5) \\ \hline -x & = & -6; & \end{array}$$

$\therefore \quad x = 6 \quad$ {multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1} $\quad (6)$

Sustituimos (6) en (4):

$$2(6) + y = 14 \Leftrightarrow 12 + y = 14;$$

$\therefore \quad y = 2 \quad$ {restando 12 en ambos miembros}.

Respuesta: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{3} - \dfrac{y-4}{4} = 0 \\ \dfrac{x-4}{2} + \dfrac{y+2}{5} = 3 \end{cases}$

Solución-Juan Beltrán:

Nombramos las ecuaciones:

$$\frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3 \qquad (2)$$

El M.C.D. de la ecuación (1) es 12 y el de la (2) es 10; por lo tanto, multiplicamos la (1) por 12 y la (2) por 10:

$$4(x-3) - 3(y-4) = 0 \Leftrightarrow 4x - 12 - 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y = 0 \qquad (3)$$

$$5(x-4) + 2(y+2) = 30 \Leftrightarrow 5x - 20 + 2y + 4 = 30 \Leftrightarrow 5x + 2y = 46 \qquad (4)$$

Multiplicamos la ecuación (3) por 2 y la (4) por 3; y, sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{rl} 8x - 6y = \quad 0 & \quad (5) \\ \underline{15x + 6y = 138} & \quad (6) \\ 23x \qquad = 138; & \end{array}$$

$\therefore \quad x = 6 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 23} $\qquad (7)$

Sustituimos (7) en (4):

$$5(6) + 2y = 46 \Leftrightarrow 30 + 2y = 46 \Leftrightarrow 2y = 16 \qquad \text{\{restando 30 en ambos miembros\};}$$

$\therefore \quad y = 8 \qquad$ {dividiendo por 2 ambos miembros}.

Respuesta: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{y-1}{3} = -\dfrac{13}{36} \\ \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+1}{2} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Solución-Juan Beltrán:

Nombramos las ecuaciones:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = -\frac{13}{36} \qquad (1)$$

$$\frac{x+1}{3} - \frac{y+1}{2} = -\frac{2}{3} \qquad (2)$$

El M.C.D. de la ecuación (1) es 36 y el de la (2) es 6; por lo tanto, multiplicamos la (1) por 36 y la (2) por 6:

$$18(x-1) - 12(y-1) = -13 \Leftrightarrow 18x - 18 - 12y + 12 = -13 \Leftrightarrow 18x - 12y = -7 \qquad (3)$$

$$2(x+1) - 3(y+1) = -4 \Leftrightarrow 2x + 2 - 3y - 3 = -4 \Leftrightarrow 2x - 3y = -3 \qquad (4)$$

Multiplicamos la ecuación (4) por -4; y, sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{rl} 18x - 12y = -7 & \quad (3) \\ \underline{-8x + 12y = 12} & \quad (5) \\ 10x \qquad = \ 5; & \end{array}$$

$\therefore \quad x = \frac{1}{\ }$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 10 y simplificando} $\qquad (6)$

15. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{10} = \dfrac{y-4}{5} \\ \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y-2}{10} \end{cases}$

Solución-Juan Beltrán:

Nombramos las ecuaciones:

$$\frac{x+1}{10} = \frac{y-4}{5} \qquad (1)$$

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-2}{10} \qquad (2)$$

El M.C.D. de ambas ecuaciones es 10; por lo tanto, multilplicamos las dos ecuaciones por 10:

$$x+1 = 2(y-4) \Leftrightarrow x+1 = 2y-8 \Leftrightarrow x-2y = -9 \qquad (3)$$

$$2(x-4) = y-2 \Leftrightarrow 2x-8 = y-2 \Leftrightarrow 2x-y = 6 \qquad (4)$$

Multiplicamos la ecuación (4) por -2 y la ecuación resultante la sumamos con la (3):

$$\begin{array}{rcll} x-2y &=& -\ 9 & (3) \\ -4x+2y &=& -12 & (5) \\ \hline -3x &=& -21; & \end{array}$$

$\therefore \quad x = 7 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -3} $\qquad (6)$

Sustituimos (6) en (4):

$$2(7)-y = 6 \Leftrightarrow 14-y = 6 \Leftrightarrow -y = -8 \qquad \{\text{restando 14 en ambos miembros}\};$$

$\therefore \quad y = 8 \qquad$ {dividiendo por -1 ambos miembros}.

Respuesta: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = -\dfrac{3y+3}{4} \\ y = -\dfrac{1+5x}{4} \end{cases}$

Solución-Juan Beltrán:

Nombramos las ecuaciones:

$$x = -\frac{3y+3}{4} \qquad (1)$$

$$y = -\frac{1+5x}{4} \qquad (2)$$

Multiplicamos por 4 ambas ecuaciones:

$$4x = -(3y+3) \Leftrightarrow 4x = -3y-3 \Leftrightarrow 4x+3y = -3 \qquad (3)$$

$$4y = -(1+5x) \Leftrightarrow 4y = -1-5x \Leftrightarrow 5x+4y = -1 \qquad (4)$$

Multiplicamos la ecuación (3) por 4, y la (4) por -3; y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{rcll} 16x+12y &=& -12 & (5) \\ -15x-12y &=& 3 & (6) \\ \hline x &=& -9 & (7) \end{array}$$

Sustituimos (7) en (3):

$$4(-9)+3y = -3 \Leftrightarrow -36+3y = -3 \Leftrightarrow 3y = 33 \qquad \{\text{sumando 36 en ambos miembros}\};$$

$\therefore \quad y = 11 \qquad$ {dividiendo por 3 ambos miembros}.

17. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{6} = \dfrac{x-y}{12} \\ \dfrac{2x}{3} = y+3 \end{cases}$

Solución-Juan Beltrán:

Nombramos las ecuaciones:

$$\frac{x+y}{6} = \frac{x-y}{12} \qquad (1)$$

$$\frac{2x}{3} = y+3 \qquad (2)$$

El M.C.D. de la ecuación (1) es 12 y el de la (2) es 3; por lo tanto, multiplicamos la (1) por 12 y la (2) por 3:

y la (2) por 2

$$2(x+y) = x-y \Leftrightarrow 2x+2y = x-y \Leftrightarrow x+3y = 0 \qquad (3)$$

$$2x = 3(y+3) \Leftrightarrow 2x = 3y+9 \Leftrightarrow 2x-3y = 9 \qquad (4)$$

Sumamos las ecuaciones (3) y (4):

−312 ⇔ x − 3

$$\begin{array}{rl} x+3y = 0 & \quad (3) \\ \underline{2x-3y = 9} & \quad (5) \\ 3x \quad\; = 9; & \end{array}$$

$\therefore \quad x = 3$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3} (6)

Sustituimos (6) en (3):

$$3+3y = 0 \Leftrightarrow 3y = -3 \qquad \{\text{restando 3 en ambos miembros}\};$$

$\therefore \quad y = -1$ {dividiendo por 3 ambos miembros}.

Respuesta: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - \dfrac{y-3}{5} = 6 \\ 3y - \dfrac{x-2}{7} = 9 \end{cases}$

Solución-Juan Beltrán:

Nombramos las ecuaciones:

$$3x - \frac{y-3}{5} = 6 \qquad (1)$$

$$3y - \frac{x-2}{7} = 9 \qquad (2)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por 5 y la (2) por 7, con el objeto de suprimir denominadores:

$$15x-(y-3) = 30 \Leftrightarrow 15x-y+3 = 30 \Leftrightarrow 15x-y = 27 \qquad (3)$$

$$21y-(x-2) = 63 \Leftrightarrow 21y-x+2 = 63 \Leftrightarrow -x+21y = 61 \qquad (4)$$

Multiplicamos la ecuación (4) por 15, y la ecuación resultante la sumamos con la (3):

$$\begin{array}{rl} 15x \quad - y = \; 27 & \quad (3) \\ \underline{-15x+315y = 915} & \quad (5) \\ 314y = 942; & \end{array}$$

$\therefore \quad y = 3$ {dividiendo ambos miembros entre 314} (6)

21. $\begin{cases} 12-\dfrac{3x-2y}{6}=3y+2 \\ \dfrac{5y-3x}{3}=x-y \end{cases}$

Solución-Juan Beltrán:

Nombramos las ecuaciones:

$$12-\frac{3x-2y}{6}=3y+2 \qquad (1)$$

$$\frac{5y-3x}{3}=x-y \qquad (2)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por 6 y la (2) por 3:

$$6\left(12-\frac{3x-2y}{6}\right)=6(3y+2) \Leftrightarrow 72-3x+2y=18y+12 \Leftrightarrow 3x+16y=60 \qquad (3)$$

$$3\left(\frac{5y-3x}{3}\right)=3(x-y) \Leftrightarrow 5y-3x=3x-3y \Leftrightarrow 6x-8y=0 \Leftrightarrow 3x=4y \qquad (4)$$

Sustituimos (4) en (3):

$$4y+16y=60 \Leftrightarrow 20y=60 \Leftrightarrow y=3 \qquad (5)$$

Sustituimos (5) en (4):

$$3x=4(3) \Leftrightarrow x=4$$

Respuesta: $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x-1=2(y+6) \\ x+6=3(1-2y) \end{cases}$

Solución:

$$\begin{cases} x-1=2(y+6) \\ x+6=3(1-2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2y+12 \\ x+6=3-6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=12+1 \\ x+6y=3-6 \end{cases} \qquad \{\text{transponiendo}\},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x-1=2(y+6) \\ x+6=3(1-2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=13 & (1) \\ x+6y=-3 & (2) \end{cases} \qquad \{\text{reduciendo}\}$$

Multiplicamos la (1) por -1 y la ecuación resultante la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{r} -x+2y=-13 \\ x+6y=\ \ -3 \\ \hline 8y=-16; \end{array}$$

$\therefore \quad y=-2 \qquad \{\text{dividiendo ambos miembros de la ecuación por 8}\} \qquad (3)$

Sustituimos (3) en (2):

$$x+6(-2)=-3,$$

$\Rightarrow \quad x-12=-3;$

$\therefore \quad x=9 \qquad \{\text{sumando 12 en ambos miembros}\}$

Respuesta: $x=9$, $y=-2$.

181

Ecuaciones simultáneas con dos incógnitas

Sistemas literales de dos ecuaciones con dos incógnitas

1. $\begin{cases} x+y=a+b \\ x-y=a-b \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombramos las ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} x+y=a+b & (1) \\ \underline{x-y=a-b} & (2) \\ 2x \quad = 2a & \{\text{sumamos las ecuaciones}\}; \end{array}$$

$\therefore \quad x=a \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} $\quad$ (3)

Sustituimos (3) en (1):

$a+y=a+b;$

$\therefore \quad y=b \quad$ {restando a en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y=b+2 \\ bx-y=0 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombramos las ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} 2x+y=b+2 & (1) \\ \underline{bx-y=0} & (2) \\ (b+2)x=b+2 & \{\text{sumamos las ecuaciones}\}; \end{array}$$

$\therefore \quad x=1 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(b+2)$} $\quad$ (3)

Sustituimos (3) en (1):

$2(1)+y=b+2 \Leftrightarrow 2+y=b+2;$

$\therefore \quad y=b \quad$ {restando 2 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: $\begin{cases} x=1 \\ y=b \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-y=3a \\ x-2y=0 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombramos las ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} 2x-y=3a & (1) \\ x-2y=0 & (2) \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación (2) por -2, y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (1):

$$\begin{array}{rl} -2x+4y=0 & (3) \\ \underline{2x \quad -y=3a} & (1) \\ 3y=3a; & \end{array}$$

$\therefore \quad y=a \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3} $\quad$ (4)

Sustituimos (4) en (2):

$x-2a=0;$

$\therefore \quad x=2a \quad$ {sumando $2a$ en ambos miembros de la ecuación}

4. $\begin{cases} x - y = 1 - a \\ x + y = 1 + a \end{cases}$

Solución:

Nombramos las ecuaciones:

$$x - y = 1 - a \qquad (1)$$
$$x + y = 1 + a \qquad (2)$$
$$2x = 2 \qquad \{\text{sumamos las ecuaciones}\};$$

$\therefore \quad x = 1 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} $\qquad (3)$

Sustituimos (3) en (2):

$$1 + y = 1 + a;$$

$\therefore \quad y = a \qquad$ {restando 1 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: $\begin{cases} x = 1 \\ y = a \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + y = 2b \\ \dfrac{x}{b} - y = a - b \end{cases}$

Solución:

Nombramos las ecuaciones:

$$\frac{x}{a} + y = 2b \qquad (1)$$
$$\frac{x}{b} - y = a - b \qquad (2)$$

Multipliquemos cada término de la ecuación (1) por a, y cada término de la (2) por $-b$:

$$x + ay = 2ab \qquad (3)$$
$$-x + by = -ab + b^2 \qquad (4)$$
$$(a+b)y = ab + b^2 \Leftrightarrow (a+b)y = (a+b)b \qquad \{\text{sumando las ecuaciones}\};$$

$\therefore \quad y = b \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(a+b)$} $\qquad (5)$

Sustituimos (5) en (3):

$$x + ab = 2ab;$$

$\therefore \quad x = ab \qquad$ {restando ab en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: $\begin{cases} x = ab \\ y = b \end{cases}$

18. $\begin{cases}(a-b)x-(a+b)y=b^2-3ab\\(a+b)x-(a-b)y=ab-b^2\end{cases}$

Solución:

Nombramos las ecuaciones:

$$(a-b)x-(a+b)y=b^2-3ab \qquad (1)$$

$$(a+b)x-(a-b)y=ab-b^2 \qquad (2)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por $-(a+b)$ y la (2) por $(a-b)$; luego, sumamos las ecuaciones resultantes, la (3) y la (4):

$$-(a+b)(a-b)x+(a+b)^2y=\{-(a+b)(b^2-3ab)=2ab^2+3a^2b-b^3\} \qquad (3)$$

$$\underline{(a+b)(a-b)x-(a-b)^2y=\{(a-b)(ab-b^2)=-2ab^2+a^2b+b^3\}} \qquad (4)$$

$$(a+b)^2y-(a-b)^2y=4a^2b,$$

$\Rightarrow \quad \left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]y=4a^2b \qquad$ {factorizando},

$\Rightarrow \quad \left[(a+b-a+b)(a+b+a-b)\right]y=4a^2b \qquad$ {factorizando la diferencia de cuadrados},

$\Rightarrow \quad \left[(2b)(2a)\right]y=4a^2b \qquad$ {simplificando},

$\Rightarrow \quad 4aby=4a^2b \qquad$ {efectuando los productos indicados};

$\therefore \quad y=a \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $4ab$} $\qquad$ (5)

Sustituimos (5) en (1):

$$(a-b)x-(a+b)a=b^2-3ab \Leftrightarrow (a-b)x=b^2-3ab+(a+b)a \Leftrightarrow (a-b)x=b^2-3ab+a^2+ab$$

$\Leftrightarrow \quad (a-b)x=b^2-3ab+a^2+ab \Leftrightarrow (a-b)x=b^2-2ab+a^2 \Leftrightarrow (a-b)x=(a-b)^2;$

$\therefore \quad x=a-b \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(a-b)$}

Respuesta: $\begin{cases}x=a-b\\y=a\end{cases}$.

19. $\begin{cases} \dfrac{x+b}{a} + \dfrac{y-b}{b} = \dfrac{a+b}{b} \\ \dfrac{x-a}{b} - \dfrac{y-a}{a} = -\dfrac{a+b}{b} \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombramos las ecuaciones:

$$\frac{x+b}{a} + \frac{y-b}{b} = \frac{a+b}{b} \qquad (1)$$

$$\frac{x-a}{b} - \frac{y-a}{a} = -\frac{a+b}{a} \qquad (2)$$

Multiplicamos ambas ecuaciones por ab:

$\therefore \quad b(x+b) + a(y-b) = a(a+b) \Leftrightarrow bx + b^2 + ay - ab = a^2 + ab \Leftrightarrow bx + ay = a^2 + 2ab - b^2 \qquad (3)$

$\therefore \quad a(x-a) - b(y-a) = -a(a+b) \Leftrightarrow ax - a^2 - by + ab = -ab - b^2 \Leftrightarrow ax - by = a^2 - 2ab - b^2 \qquad (4)$

Multplicamos la ecuación (3) por b y la ecuación (4) por a:

$$\begin{array}{l} b^2x + aby = a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \underline{a^2x - aby = a^3 - 2a^2b - ab^2} \\ (a^2+b^2)x = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 \Leftrightarrow (a^2+b^2)x = a^2(a-b) + b^2(a-b) \Leftrightarrow (a^2+b^2)x = (a-b)(a^2+b^2); \end{array}$$

$\therefore \quad x = a - b \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por (a^2+b^2)} $\qquad (5)$

Sustituimos (5) en (3):

$$b(a-b) + ay = a^2 + 2ab - b^2 \Leftrightarrow ab - b^2 + ay = a^2 + 2ab - b^2 \Leftrightarrow ay = a^2 + ab \Leftrightarrow ay = a(a+b);$$

$\therefore \quad y = a + b \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por a}

Respuesta: $\begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a+b} = \dfrac{1}{ab} \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2} \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombramos las ecuaciones:

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a+b} = \frac{1}{ab} \qquad (1)$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \qquad (2)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por $ab(a+b)$ y la ecuación (2) por a^2b^2:

$$abx + aby = a + b \qquad (3)$$

$$a^2bx + ab^2y = a^2 + b^2 \qquad (4)$$

Multplicamos la ecuación (3) por a y la ecuación (4) por -1:

$$\begin{array}{l} a^2bx + a^2by = a^2 + ab \\ \underline{-a^2bx - ab^2y = -a^2 - b^2} \\ (a^2b - ab^2)y = ab - b^2 \Leftrightarrow ab(a-b)y = b(a-b); \end{array}$$

$\therefore \quad y = \dfrac{1}{a} \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por $ab(a-b)$} $\qquad (5)$

Sustituimos (5) en (3):

$$abx + ab\left(\frac{1}{a}\right) = a + b \Leftrightarrow abx + b = a + b \Leftrightarrow abx = a;$$

$\therefore \quad x = \dfrac{1}{b} \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por ab}

Respuesta: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{b} \\ y = \dfrac{1}{a} \end{cases}$

Ecuaciones simultáneas con dos incógnitas

Ecuaciones simultáneas con incógnitas en los denominadores

Procedimiento

Vamos a mostrar un método especial en el que no hay necesidad de suprimir los denominadores para eliminar una de las incógnitas

1. Se ordenan y nombran las ecuaciones
2. Se multiplican las ecuaciones por números adecuados que hagan que los coeficientes de una de las incógnitas (la que se va a eliminar) sean iguales en ambas ecuaciones pero con signos opuestos
3. Se suman, término a término, las ecuaciones resultantes
4. Se despeja la incógnita que queda
5. Se sustituye el valor obtenido, en el paso anterior, para la incógnita, en una de las ecuaciones originales y se halla el valor de la segunda incógnita

Resolver los sistemas:

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{7}{6} \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Solución:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{7}{6} \qquad (1)$$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \qquad (2)$$

Con el objeto de eliminar la y, multiplicamos la ecuación (2) por -2, y la ecuación resultante la sumamos con la (1):

$$\begin{array}{r} -\dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{y} = -\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{7}{6} \\ \hline -\dfrac{3}{x} \qquad = -\dfrac{3}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \qquad$ {dividiendo ambos miembros por -3};

$\therefore \quad x = 2 \qquad$ {invirtiendo las fracciones} $\quad$ (3)

Susttuimos (3) en (2):

$$\frac{2}{2} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{4}{3} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{3};$$

$\therefore \quad y = 3 \qquad$ {invirtiendo las fracciones}

Respuesta: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{23}{12} \end{cases}$

Solución:

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{23}{12} \qquad (2)$$

Con el objeto de eliminar la y, multiplicamos la ecuación (1) por 5 y la (2) por 2; y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\frac{15}{x} - \frac{10}{y} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{x} + \frac{10}{y} = \frac{46}{12}$$

$$\frac{19}{x} \qquad = \frac{19}{3}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$ {dividiendo ambos miembros por 19};

$\therefore \quad x = 3$ {invirtiendo las fracciones} (3)

Susttuimos (3) en (1):

$$\frac{3}{3} - \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{y} = \frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{y} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 2;$$

$\therefore \quad y = 4$ {multiplicando cada miembro de la ecuación por 2}

Respuesta: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=7 \\ \dfrac{7}{x}-\dfrac{6}{y}=4 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

$$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}=7 \quad (1)$$

$$\frac{7}{x}-\frac{6}{y}=4 \quad (2)$$

Con el objeto de eliminar la y, multiplicamos la ecuación (1) por 3 y la (2) por 2; y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{l} \dfrac{15}{x}+\dfrac{12}{y}=21 \\ \dfrac{14}{x}-\dfrac{12}{y}=\ 8 \\ \hline \dfrac{29}{x} \qquad\quad =29 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{29}=\dfrac{1}{29}$ {invirtiendo las fracciones};

$\therefore \quad x=1$ {multiplicando cada miembro de la fracción por 29} (3)

Susttuimos (3) en (1):

$$\frac{5}{1}+\frac{4}{y}=7 \Leftrightarrow 5+\frac{4}{y}=7 \Leftrightarrow \frac{4}{y}=7-5 \Leftrightarrow \frac{4}{y}=2 \Leftrightarrow \frac{y}{4}=\frac{1}{2};$$

$\therefore \quad y=2$ {multiplicando cada miembro de la ecuación por 4 y simplificando}

Respuesta: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{12}{x}+\dfrac{5}{y}=-\dfrac{13}{2} \\ \dfrac{18}{x}+\dfrac{7}{y}=-\dfrac{19}{2} \end{cases}$

Solución:

$$\frac{12}{x}+\frac{5}{y}=-\frac{13}{2} \quad (1)$$

$$\frac{18}{x}+\frac{7}{y}=-\frac{19}{2} \quad (2)$$

Con el objeto de eliminar la x, multiplicamos la ecuación (1) por 3 y la (2) por -2; y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{r} \dfrac{36}{x}+\dfrac{15}{y}=-\dfrac{39}{2} \\ -\dfrac{36}{x}-\dfrac{14}{y}=\ \dfrac{38}{2} \\ \hline \dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad y=-2$ {invirtiendo las fracciones} (3)

Sustituimos (3) en (1):

$$\frac{12}{x}+\frac{5}{-2}=-\frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{12}{x}=-\frac{13}{2}+\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{12}{x}=-\frac{8}{2} \Leftrightarrow \frac{12}{x}=-4 \Leftrightarrow \frac{x}{12}=-\frac{1}{4};$$

$\therefore \quad x=-3$ {multiplicando cada miembro de la ecuación por 12 y simplificando}

Respuesta: $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

183

Desarrollo de una determinante de segundo orden

Procedimiento
1. Se multiplican los términos de la diagonal principal **2.** Se multiplican los términos de la diagonal secundaria **3.** Se halla la diferencia entre el producto de la diagonal principal y la diagonal secundaria

Desarrollar las determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\times3-5\times2 = 12-10 = 2.$$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5-7\times3 = 10-21 = -11.$$

3. $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2\times3-5\times4 = -6-20 = -26.$$

4. $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 7\times(-2)-9\times5 = -14-45 = -59.$$

5. $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 5\times(-8)-(-3)\times(-2) = -40-6 = -46.$$

6. $\begin{vmatrix} 9 & -11 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 9 & -11 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 9\times7-(-11)\times(-3) = 63-33 = 30.$$

Resolución por determinantes de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

P r o c e d i m i e n t o

1. Se ordenan las ecuaciones y se escribe el sistema en la forma:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 & (1) \\ a_2 x + b_2 y = c_2 & (2) \end{cases}$$

2. El valor de *x* es una fracción cuyo denominador es la determinante del sistema y cuyo numerador es la determinante que se obtiene sustituyendo en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de *x* por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas; esto es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

3. El valor de *y* es una fracción cuyo denominador es la determinante del sistema y cuyo numerador es la determinante que se obtiene sustituyendo en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de *y* por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas; esto es:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Resolver por determinantes:

1. $\begin{cases} 7x + 8y = 29 \\ 5x + 11y = 26 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 29 & 8 \\ 26 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{29 \times 11 - 8 \times 26}{7 \times 11 - 8 \times 5} = \frac{319 - 208}{77 - 40} = \frac{111}{37} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 29 \\ 5 & 26 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{7 \times 26 - 29 \times 5}{7 \times 11 - 8 \times 5} = \frac{182 - 145}{77 - 40} = \frac{37}{37} = 1$$

Respuesta: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 8x - 5y = -5 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -4 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{13(-5) - (-4)(-5)}{3(-5) - (-4)(8)} = \frac{-65 - 20}{-15 + 32} = \frac{-85}{17} = -5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{3(-5) - 13 \times 8}{3(-5) - (-4)(8)} = \frac{-15 - 104}{-15 + 32} = \frac{-119}{17} = -7$$

Respuesta: $\begin{cases} x = -5 \\ y = -7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 13x - 31y = -326 \\ 25x + 37y = 146 \end{cases}$

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -326 & -31 \\ 146 & 37 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & -31 \\ 25 & 37 \end{vmatrix}} = \frac{-326\times 37 - (-31)\times 146}{13\times 37 - (-31)\times 25} = \frac{-12062 + 4526}{481 + 775} = \frac{-7536}{1256} = -6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -326 \\ 25 & 146 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & -31 \\ 25 & 37 \end{vmatrix}} = \frac{13\times 146 - (-326)\times 25}{13\times 37 - (-31)\times 25} = \frac{1898 + 8150}{481 + 775} = \frac{10048}{1256} = 8$$

Respuesta: $\begin{cases} x = -6 \\ y = 8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 15x - 44y = -6 \\ 32y - 27x = -1 \end{cases}$

Solución:

Ordenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 15x - 44y = -6 \\ -27x + 32y = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -44 \\ -1 & 32 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -44 \\ -27 & 32 \end{vmatrix}} = \frac{-6(32) - (-44)(-1)}{15(32) - (-44)(-27)} = \frac{-192 - 44}{-708} = \frac{-236}{-708} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -27 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -44 \\ -27 & 32 \end{vmatrix}} = \frac{15(-1) - (-6)(-27)}{15(32) - (-44)(-27)} = \frac{-15 - 162}{-708} = \frac{-177}{-708} = \frac{1}{4}$$

Respuesta: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

5. $\begin{cases} 8x = -9y \\ 2x + 5 + 3y = 3\frac{1}{2} \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Reduzcamos y ordenemos las ecuaciones:

En la segunda ecuación hay que reducir $3\frac{1}{2} - 5 \Leftrightarrow \frac{7}{2} - 5 = -\frac{3}{2}$. La ecuación quedaría

$$2x + 3y = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 4x + 6y = -3$$

$$\begin{cases} 8x + 9y = 0 \\ 4x + 6y = -3 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{0 \times 6 - 9(-3)}{8(-6) - 9(4)} = \frac{0 + 27}{48 - 36} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8(-3) - 0 \times 4}{8(-6) - 9(4)} = \frac{-24 - 0}{48 - 36} = \frac{-24}{12} = -2$$

Respuesta: $\begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = -2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} ax - by = -1 \\ ax + by = 7 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -b \\ 7 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ a & b \end{vmatrix}} = \frac{-1(b) - (-b)(7)}{ab - (-b)(a)} = \frac{-b + 7b}{ab + ab} = \frac{6b}{2ab} = \frac{3}{a}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 \\ a & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ a & b \end{vmatrix}} = \frac{a(7) - (-1)a}{ab - (-b)(a)} = \frac{7a + a}{ab + ab} = \frac{8a}{2ab} = \frac{4}{b}$$

Respuesta: $\begin{cases} x = \frac{3}{a} \\ y = \frac{4}{b} \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-(y+2)=2y+1 \\ 5y-(x+3)=3x+1 \end{cases}$

Solución:

Reduzcamos y ordenemos las ecuaciones:

$$3x-(y+2)=2y+1 \Leftrightarrow 3x-y-2=2y+1 \Leftrightarrow 3x-y-2y=1+2 \Leftrightarrow 3x-3y=3 \Leftrightarrow x-y=1$$

$$5y-(x+3)=3x+1 \Leftrightarrow 5y-x-3=3x+1 \Leftrightarrow 5y-x-3x=1+3 \Leftrightarrow 5y-4x=4 \Leftrightarrow -4x+5y=4$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ -4x+5y=4 \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{1\times5-(-1)(4)}{1\times5-(-1)(-4)}=\frac{5+4}{5-4}=\frac{9}{1}=9$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{1\times4-(1)(-4)}{1\times5-(-1)(-4)}=\frac{4+4}{5-4}=\frac{8}{1}=8$$

Respuesta: $\begin{cases} x=9 \\ y=8 \end{cases}$

Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Procedimiento

1. Representamos en el plano cartesiano cada una de las ecuaciones (las gráficas son líneas rectas). Para lo cual:

a. Hallamos los interceptos con los ejes: haciendo $x=0$ y despejando y, se obtiene el intercepto con el eje*y*. Haciendo $y=0$ y despejando a *x*, se obtiene el intercepto con el eje*x*.

b. Se ubican en el plano los puntos cuyas coordenadas hallamos en le paso anterior, y los unimos mediante una línea recta.

2. Se observan las gráficas y se deduce la solución de acuerdo con las tres posibilidades siguientes:

a. Si las rectas se intersectan en un punto, por *interpolación*, se obtienen las coordenadas del punto. Interpolación: la perpendicular trazada desde el punto de intersección al eje*x* da el valor de *x*; la perpendicular trazada desde el punto de intersección al eje*y* da el valor de *y*.

b. Si las rectas son paralelas, no hay solución, y se dice que las ecuaciones son *incompatibles*.

c. Si las rectas coinciden, hay un número infinito de soluciones, y se dice que las ecuaciones son *equivalentes*.

3. En caso de que la solución sea única es conveniente verificar el resultado obtenido mediante la sustitución de los valores hallados en ambas ecuaciones.

Resolver gráficamente:

1. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Solución:

Nombremos las ecuaciones:

$x - y = 1 \quad (1)$

$x + y = 7 \quad (2)$

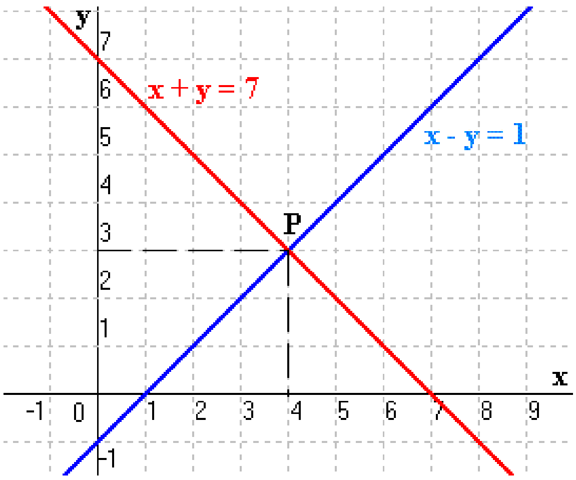
En (1): $\begin{cases} \text{cuando } x = 0,\ y = -1: \text{ intercepto con el eje} y \\ \text{cuando } y = 0,\ x = 1: \text{ intercepto con el eje} x \end{cases}$

En (2): $\begin{cases} \text{cuando } x = 0,\ y = 7: \text{ intercepto con el eje} y \\ \text{cuando } y = 0,\ x = 7: \text{ intercepto con el eje} x \end{cases}$

Las rectas se intersectan en el punto P

Por interpolación se deduce que las coordenadas de P son $(4, 3)$;

$s = \begin{cases} x = 4 \\ y = 3. \end{cases}$



2. $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -8 \end{cases}$

Solución:

Nombremos las ecuaciones:

$x - 2y = 10 \quad (1)$

$2x + 3y = -8 \quad (2)$

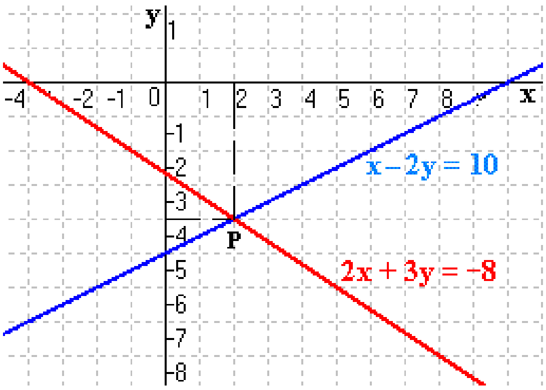
En (1): $\begin{cases} \text{cuando } x = 0,\ y = -5: \text{ intercepto con el eje } y \\ \text{cuando } y = 0,\ x = 10: \text{ intercepto con el eje } x \end{cases}$

En (2): $\begin{cases} \text{cuando } x = 0,\ y = -3/8: \text{ intercepto con el eje } y \\ \text{cuando } y = 0,\ x = -4: \text{ intercepto con el eje } x \end{cases}$

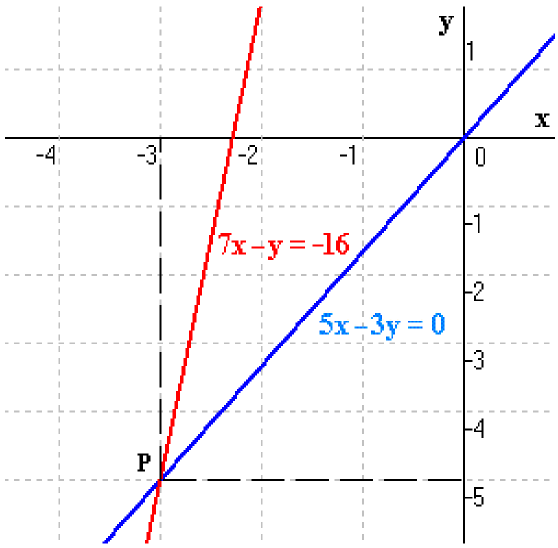
Las rectas se intersectan en el punto P

Por interpolación se deduce que las coordenadas de P son $(2, -4)$;

$s = \begin{cases} x = 2 \\ y = -4. \end{cases}$



3. $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 7x - y = -16 \end{cases}$



Solución:

Nombremos las ecuaciones:

$5x - 3y = 0 \quad (1)$

$7x - y = -16 \quad (2)$

En (1): $\begin{cases} \text{cuando } x = 0,\ y = 0:\ \text{intercepto con el eje} y \\ \text{cuando } y = 0,\ x = 0:\ \text{intercepto con el eje} x \\ \text{cuando } x = -1,\ y = -5/3 \end{cases}$

En (2): $\begin{cases} \text{cuando } x = -3,\ y = -5 \\ \text{cuando } y = 0,\ x = -16/7: \\ \text{intercepto con el eje} x \end{cases}$

Las rectas se intersectan en el punto P

Por interpolación se deduce que las coordenadas de P son $(-3, -5)$;

$s = \begin{cases} x = -3 \\ y = -5. \end{cases}$

186

Ecuaciones simultáneas con tres incógnitas

P r o c e d i m i e n t o

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se procede de la siguiente manera:

1. Se nombran las ecuaciones

2. Se combinan dos de las ecuaciones y se elimina una de las incógnitas (por suma o resta: previamente multiplicando los coeficientes por números adecuados); se obtiene así una ecuación con sólo dos incógnitas

3. Se combina la otra ecuación con una cualquiera de las anteriores y, de manera similar al paso anterior, eliminamos la misma incógnita; obteniéndose así otra ecuación con dos incógnitas

4. Solucionamos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas halladas en los dos pasos precedentes; encontrando así los valores de las dos incógnitas

5. Se sustituye, en una de las ecuaciones originales, los valores de las dos incógnitas encontrados en el paso anterior, para hallar así la tercera incógnita.

Resolver los sistemas:

1. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \\ x-y-3z=-10 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombramos las ecuaciones:

$$x+y+z=6 \qquad (1)$$
$$x-y+2z=5 \qquad (2)$$
$$x-y-3z=-10 \qquad (3)$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (2), como también, la (1) y (3):

$$\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \\ \hline 2x \quad +3z=11 \end{array} \quad (4) \qquad\qquad \begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x-y-3z=-10 \\ \hline 2x \quad -2z=-4 \end{array} \quad (5)$$

Restamos la ecuación (5) de la (4), para lo cual cambiamos los signos de cada término de la (5):

$$\begin{array}{r} 2x+3z=11 \\ -2x+2z=4 \\ \hline 5z=15 \Leftrightarrow z=3 \end{array} \qquad (6)$$

Sustituimos (6) en (4):

$$2x+3(3)=11 \Leftrightarrow 2x+9=11 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1 \qquad (7)$$

Sustituimos (6) y (7) en (1):

$$1+y+3=6 \Leftrightarrow y+4=6 \Leftrightarrow y=2$$

Respuesta: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3y - 4z = 25 \\ z - 5x = -14 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Ordenamos y nombramos las ecuaciones:

$$3x - 2y = 0 \qquad (1)$$
$$3y - 4z = 25 \qquad (2)$$
$$-5x + z = -14 \qquad (3)$$

Multiplicamos la ecuación (3) por 4 y, la ecuación resultante, la (4), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{rcrl} -20x \qquad + 4z &=& -56 & (4) \\ 3y - 4z &=& 25 & \\ \hline -20x + 3y \qquad &=& -31 & (5) \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación (5) por 2 y la ecuación (1) por 3 y, sumamos las ecuaciones resultantes, la (6) y la (7):

$$\begin{array}{rcrl} -40x + 6y &=& -62 & (6) \\ 9x - 6y &=& 0 & (7) \\ \hline -31x \qquad &=& -62 \Leftrightarrow x = 2 & (8) \end{array}$$

Sustituimos (8) en (1); como también (8) en (3):

Sustituimos (6) y (7) en (1):

$$3(2) - 2y = 0 \Leftrightarrow 6 - 2y = 0 \Leftrightarrow -2y = -6 \Leftrightarrow y = 3$$
$$-5(2) + z = -14 \Leftrightarrow -10 + z = -14 \Leftrightarrow z = -4$$

Respuesta: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -4 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=21 \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{6}-\dfrac{z}{3}=0 \\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{6}=3 \end{cases}$

Solución:
Multiplicamos cada ecuación por su m.c.d. con el fin de eliminar los denominadores; posteriormente, nombramos las ecuaciones :

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=21 \Leftrightarrow 12\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}\right)=12(21) \Leftrightarrow 4x+3y+4z=252 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{6}-\frac{z}{3}=0 \Leftrightarrow 30\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{6}-\frac{z}{3}\right)=30(0) \Leftrightarrow \quad 6x+5y-10z=0 \qquad (2)$$

$$\frac{x}{10}+\frac{y}{3}-\frac{z}{6}=3 \Leftrightarrow 30\left(\frac{x}{10}+\frac{y}{3}-\frac{z}{6}\right)=30(3) \Leftrightarrow \ 3x+10y-5z=90 \qquad (3)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por 5 y la ecuación (2) por 2; luego sumamos las ecuaciones resultantes, la (4) y la (5). También, multiplicamos la ecuación (3) por 4 y, la ecuación resultante, la (6), la sumamos con la (4):

$$\begin{array}{lr} 20x+15y+20z=1260 & (4) \\ 12x+10y-20z=\quad 0 & (5) \\ \hline 32x+25y \qquad =1260 & (7) \end{array} \qquad \begin{array}{lr} 12x+40y-20z=\ 360 & (6) \\ 20x+15y+20z=1260 & (4) \\ \hline 32x+55y \qquad =1620 & (8) \end{array}$$

Restamos la ecuación (7) de la (8), para lo cual cambiamos los signos de la (7):

$$\begin{array}{l} 32x+55y=\ \ 1620 \\ -32x-25y=-1260 \\ \hline \qquad 30y=\ \ 360 \Leftrightarrow y=12 \qquad (9) \end{array}$$

Sustituimos (9) en (7):

$$32x+25(12)=1260 \Leftrightarrow 32x+300=1260 \Leftrightarrow 32x=960 \Leftrightarrow x=30 \qquad (10)$$

Sustituimos (9) y (10) en (1):

$$4(30)+3(12)+4z=252 \Leftrightarrow 120+36+4z=252 \Leftrightarrow 156+4z=252 \Leftrightarrow 4z=96 \Leftrightarrow z=24$$

Respuesta: $\begin{cases} x=30 \\ y=12 \\ z=24 \end{cases}$

187

Hallar el valor de una determinante de tercer orden

Procedimiento

Vamos a utilizar la regla de Sarrus; procederemos de la siguiente manera:

1. Debajo de la tercea fila se repiten las dos primeras filas

2. Se efectúan los productos de los números en cada una de las diagonales, tanto de las que van de izquierda a derecha como las que van de derecha a izquierda

3. El valor de la determinante será igual a la suma de los productos de los números ubicados en las diagonales que van de izquierda a derecha menos la suma de los productos de lo números ubicados en las diagonales que van de derecha a izquierda.

Hallar el valor de las siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \{\text{volvemos a escribir las dos primeras filas despues de la tercera fila}\}$$

Ahora, multiplicamos entre si los números ubicados en cada diagonal de izquierda a derecha:

$$1\times 3\times 2 = 6$$

$$1\times 0\times 1 = 0$$

$$1\times 2\times 4 = 8$$

También, multiplicamos entre si los números ubicados en cada diagonal de derecha a izquierda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1\times 3\times 1 = 3$$

$$4\times 0\times 1 = 0$$

$$2\times 2\times 1 = 4$$

El valor de la determinante será igual a la suma de los productos de los números en las diagonales que van de izquierda a derecha menos la suma de los productos de los números en las diagonales que van de derecha a izquierda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6+0+8)-(3+0+4) = 14-7 = 7.$$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} \qquad \{\text{volvemos a escribir las dos primeras filas despues de la tercera fila}\}$$

Ahora, multiplicamos entre si los números ubicados en cada diagonal de izquierda a derecha:

$$2 \times (-4) \times 4 = -32$$

$$3 \times 2 \times (-1) = -6$$

$$6 \times 5 \times 3 = 90$$

También, multiplicamos entre si los números ubicados en cada diagonal de derecha a izquierda:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$-1 \times (-4) \times 6 = 24$$

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

$$4 \times 5 \times 3 = 60$$

El valor de la determinante será igual a la suma de los productos de los números en las diagonales que van de izquierda a derecha menos la suma de los productos de los números en las diagonales que van de derecha a izquierda:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-32 - 6 + 90) - (24 + 12 + 60) = 52 - 96 = -44.$$

12. $\begin{vmatrix} 11 & -5 & 7 \\ -12 & 3 & 8 \\ -13 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 11 & -5 & 7 \\ -12 & 3 & 8 \\ -13 & 1 & 9 \\ 11 & -5 & 7 \\ -12 & 3 & 8 \end{vmatrix} \quad \{\text{volvemos a escribir las dos primeras filas despues de la tercera fila}\}$$

Ahora, multiplicamos entre si los números ubicados en cada diagonal de izquierda a derecha:

$11 \times 3 \times 9 = 297$

$-12 \times 1 \times 7 = -84$

$-13 \times (-5) \times 8 = 520$

También, multiplicamos entre si los números ubicados en cada diagonal de derecha a izquierda:

$$\begin{vmatrix} 11 & -5 & 7 \\ -12 & 3 & 8 \\ -13 & 1 & 9 \\ 11 & -5 & 7 \\ -12 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$7 \times 3 \times (-13) = -273$

$8 \times 1 \times 11 = 88$

$9 \times (-5) \times (-12) = 540$

El valor de la determinante será igual a la suma de los productos de los números en las diagonales que van de izquierda a derecha menos la suma de los productos de los números en las diagonales que van de derecha a izquierda:

$$\begin{vmatrix} 11 & -5 & 7 \\ -12 & 3 & 8 \\ -13 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (297 - 84 + 520) - (-273 + 88 + 540) = 733 - 355 = 378.$$

188

Ecuaciones simultáneas con tres incógnitas

Resolución por determinantes

Resolver por determinantes:

1. $\begin{cases} x+y+z=11 \\ x-y+3z=13 \\ 2x+2y-z=7 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Hallemos el valor del determinante del sistema (aplicando la regla de Sarrus):

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \Leftrightarrow \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}$$

$$(1)(-1)(-1)+(1)(2)(1)+2(1)(3)-\{(1)(-1)(2)+(3)(2)(1)+(-1)(1)(1)\}=1+2+6-\{-2+6-1\}=9-3=6$$

Hallemos el valor del numerador de la fracción de la x, aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc} 11 & 1 & 1 \\ 13 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \Leftrightarrow \\ 11 & 1 & 1 \\ 13 & -1 & 3 \end{array}$$

$$11(-1)(-1)+13(2)(1)+7(1)(3)-\{(1)(-1)(7)+(3)(2)(11)+(-1)(1)(13)\}=11+26+21-\{-7+66-13\}=58-$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 13 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{12}{6}=2$$

Hallemos el valor del numerador de la fracción de la y, aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 11 & 1 \\ 1 & 13 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \Leftrightarrow \\ 1 & 11 & 1 \\ 1 & 13 & 3 \end{array}$$

$$(1)(13)(-1)+(1)(7)(1)+2(11)(3)-\{(1)(13)(2)+(3)(7)(1)+(-1)(11)(1)\}=-13+7+66-\{26+21-11\}=60-$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 1 & 13 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{24}{6}=4$$

Hallemos el valor del numerador de la fracción de la z, aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 13 \\ 2 & 2 & 7 \quad \Leftrightarrow \end{array}$$

9. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y=6 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Hallemos el valor del determinante del sistema (aplicando la regla de Sarrus):

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \Leftrightarrow \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(1)(2)(0)+(1)(3)(1)+2(1)(0)-\{(1)(2)(2)+(0)(3)(1)+(0)(1)(1)\}=0+3+0-\{4+0+0\}=3-4=-1$$

Hallemos el valor del numerador de la fracción de la x, aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \Leftrightarrow \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{array}$$

$$3(2)(0)+6(3)(1)+6(1)(0)-\{(1)(2)(6)+(0)(3)(3)+(0)(1)(6)\}=0+18+0-\{12+0+0\}=18-12=6$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{6}{-1}=-6$$

Hallemos el valor del numerador de la fracción de la y, aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \Leftrightarrow \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{array}$$

$$(1)(6)(0)+(1)(6)(1)+2(3)(0)-\{(1)(6)(2)+(0)(6)(1)+(0)(3)(1)\}=0+6+0-\{12+0+0\}=6-12=-6$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-6}{-1}=6$$

Hallemos el valor del numerador de la fracción de la z, aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \Leftrightarrow \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}$$

$$(1)(2)(6)+(1)(3)(3)+2(1)(6)-\{3(2)(2)+6(3)(1)+6(1)(1)\}=12+9+12-\{12+18+6\}=33-36=-3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-3}{-1}=3$$

Respuesta: $\begin{cases} x=6 \\ y=6 \\ z=3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{2} - z = 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{8} - \frac{z}{2} = 0 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Multipliquemos cada ecuación por su m.c.d., con el objeto de eliminar los denominadores:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 12\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{4}\right) = 12 \Leftrightarrow 4x - 3y + 3z = 12 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{2} - z = 1 \Leftrightarrow 6\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{2} - z\right) = 6 \Leftrightarrow x + 3y - 6z = 6 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{8} - \frac{z}{2} = 0 \Leftrightarrow 8\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{8} - \frac{z}{2}\right) \Leftrightarrow 4x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

Hallemos el valor del determinante del sistema (aplicando la regla de Sarrus):

$$\begin{matrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -6 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -6 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$4(3)(-4) + 1(-1)(3) + 4(-3)(-6) - \{3(3)(4) + (-6)(-1)(4) + (-4)(-3)(1)\} =$

$-48 - 3 + 72 - \{36 + 24 + 12\} = 21 - 72 = -51$

Hallemos el valor del numerador de la fracción de la x, aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{matrix} 12 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 12 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & -6 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$12(3)(-4) + 6(-1)(3) + 0(-3)(-6) - \{3(3)(0) + (-6)(-1)(12) + (-4)(-3)(6)\} =$

$-144 - 18 + 0 - \{0 + 72 + 72\} = -162 - 144 = -306$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -6 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-306}{-51} = 6$$

Hallemos el valor del numerador de la fracción de la y, aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{matrix} 4 & 12 & 3 \\ 1 & 6 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 12 & 3 \\ 1 & 6 & -6 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$4(6)(-4) + 1(0)(3) + 4(12)(-6) - \{3(6)(4) + (-6)(0)(4) + (-4)(12)(1)\} =$

Hallemos el valor del numerador de la fracción de la z, aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc} 4 & -3 & 12 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 12 \\ 1 & 3 & 6 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$4(3)(0)+1(-1)(12)+4(-3)(6)-\{12(3)(4)+6(-1)(4)+0(-3)(1)\}=0-12-72-\{144-24+0\}=-84-120=-204$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 12 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -6 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-204}{-51}=4$$

Respuesta: $\begin{cases} x=6 \\ y=8 \\ z=4 \end{cases}$

189

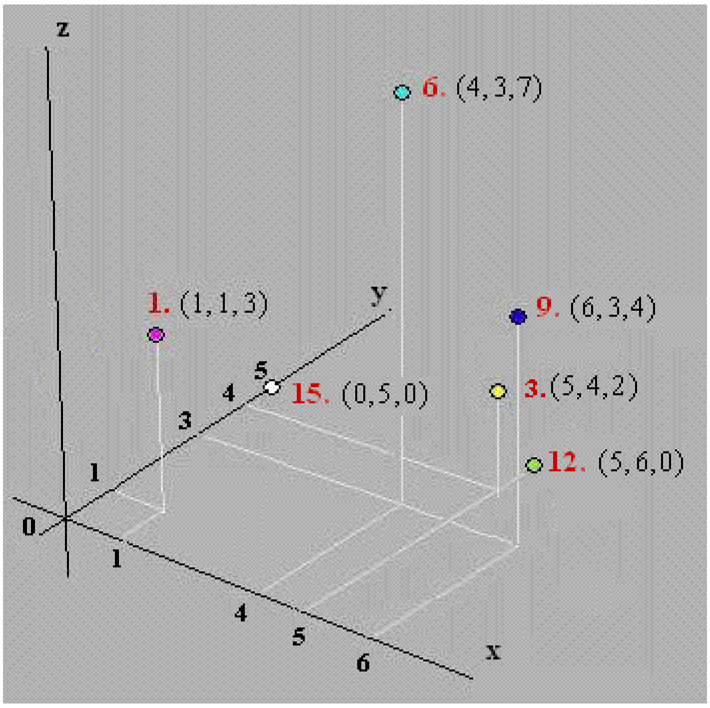
Representación gráfica en el espacio

Representación gráfica de puntos en el espacio

Represente gráficamente los puntos siguientes:

1. (1,1,3), **3.** (5,4,2), **6.** (4,3,7), **9.** (6,3,4), **12.** (5,5,0), **15.** (0,5,0)

Solución - Juan Beltrán:



190

Representación gráfica en el espacio

Representación gráfica de una ecuación de prtimer grado con tres variables

Procedimiento

Para representar gráficamente una ecuación de primer grado con tres incógnitas en el espacio (cuya gráfica es un plano), se procede asi:

1. Se hallan los puntos donde el plano corta los ejes

2. El corte con el eje$x$ se halla haciendo $y = 0$ y $z = 0$ en la ecuación y despejando x

3. El corte con el eje$y$ se halla haciendo $x = 0$ y $z = 0$ en la ecuación y despejando y

4. El corte con el ejez se halla haciendo $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación y despejando z

5. Se unen entre si los tres puntos de corte que hemos hallado

6. Se sombrea el interior de la región triangular que se ha obtenido

Representar gráficamente las ecuaciones:

1. $3x + 6y + 2z = 6$

Solución - Juan Beltrán:

- Corte con el eje$x$:

  $$3x + 6(0) + 2(0) = 6 \iff 3x = 6 \iff x = 2$$

- Corte con el eje$y$:

  $$3(0) + 6y + 2(0) = 6 \iff 6y = 6 \iff y = 1$$

- Corte con el eje$z$:

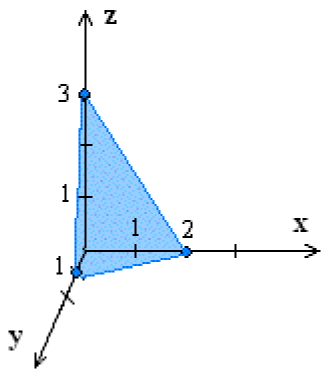
  $$3(0) + 6(0) + 2z = 6 \iff 2z = 6 \iff z = 3$$

- Trazamos sobre los ejes los puntos:

  (2,0,0), (0,1,0), (0,0,3)

- Unimos con segmentos los puntos sobre los ejes
- Sombreamos el interior de la región triangular

A la derecha se puede observar la gráfica.



Ejercicio 192

Ecuaciones simultáneas con cuatro incógnitas

Procedimiento

Para resolver un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, se procede de la siguiente manera:

1. Se nombran las ecuaciones.

2. Se combina la ecuación (1) con cada una de las otras tres ecuaciones, eliminando la misma letra en cada combinación; obteniendo así las ecuacones (5), (6) y (7), todas con las mismas tres incógnitas.

3. Se reunen las ecuaciones (5), (6) y (7) en un nuevo sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

4. Se combina la ecuación (5) con la (6), como también, la (5) con la (7), para eliminar la misma incógnita en ambas combinaciones; obteniendo de esta forma las ecuaciones (8) y (9) con las mismas dos incógnitas.

5. Se reunen las ecuaciones (8) y (9) en un nuevo sistema de dos ecuacines con dos incógnitas.

6. Se resuelve el sistema obtenido en el paso anterior, hallando así el valor de dos de las incógnitas; para hallar la tercera incógnita, se sustituyen estos valores en la ecuación (5), (6) o (7); por último, para obtener la cuarta incógnita se sustituyen los valores obtenidos para las tres incógnitas precedentes en la ecuación (1), (2), (3) o (4).

Resolver los sistemas:

2. $\begin{cases} x+y+z+u=10 \\ 2x-y-2z+2u=2 \\ x-2y+3z-u=2 \\ x+2y-4z+2u=1 \end{cases}$

<u>Solución</u>:

Nombramos las ecuaciones:

$x+y+z+u=10 \quad (1)$

$2x-y-2z+2u=2 \quad (2)$

$x-2y+3z-u=2 \quad (3)$

$x+2y-4z+2u=1 \quad (4)$

Vamos a formar un sistema de 3×3, en donde no aparecerá la u.

Multiplicamos la ecuación (1) por -2, y la ecuación resultante, la sumamos con la (2), para obtener la ecuación (5); como también, la sumamos con la (4), para obtener la (6):

$$\begin{array}{r} -2x-2y-2z-2u=-20 \\ \underline{2x\ -y-2z+2u=\quad 2} \\ -3y-4z\qquad =-18 \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{r} -2x-2y-2z-2u=-20 \\ \underline{x+2y-4z+2u=\quad 1} \\ -x\qquad -6z\qquad =-19 \end{array} \quad (6)$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (3):

$$\begin{array}{r} x\ \ +y\ \ +z+u=10 \\ \underline{x-2y+3z-u=\ 2} \\ 2x-y+4z\qquad =12 \end{array} \quad (7)$$

Reunimos las ecuaciones (5), (6) y (7) en el siguiente sistema de 3×3:

$-3y-4z=-18 \quad (5)$

$-x-6z=-19 \quad (6)$

$2x-y+4z=12 \quad (7)$

Ahora, vamos a formar un sistema de 2×2, en donde no aparecerá la x.

Multiplicamos la ecuación (6) por 2 y, la ecuación resultante, la sumamos con la (7):

$$\begin{array}{r} -2x\qquad -12z=-38 \\ \underline{2x-y\ \ +4z=\ \ 12} \\ -y\ \ \ -8z=-26 \end{array} \quad (8)$$

Reunimos las ecuaciones (5) y (8) en el siguiente sistema de 2×2:

$-3y-4z=-18 \quad (5)$

$-y\ \ -8z=-26 \quad (8)$

Multiplicamos la ecuación (5) por -2 y, la ecuación resultante, la sumamos con la (7):

$$\begin{array}{r} 6y+8z=\ \ 36 \\ \underline{-y-8z=-26} \\ 5y\qquad =10 \end{array} \Leftrightarrow y=2 \quad (9)$$

Sustituimos (9) en (5):

$-3(2)-4z=-18 \Leftrightarrow -6-4z=-18 \Leftrightarrow -4z=-12 \Leftrightarrow z=3 \quad (10)$

Sustituimos (10) en (5):

$-x-6(3)=-19 \Leftrightarrow -x-18=-19 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow x=1 \quad (11)$

Sustituimos (9), (10) y (11) en (1):

$1+2+3+u=10 \Leftrightarrow 6+u=10 \Leftrightarrow u=4 \quad (12)$

$s=\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \\ u=4 \end{cases}$

193

Problemas sobre ecuaciones simultáneas

1. La diferencia de dos números es 40 y 1/8 de su suma es 11. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$x - y = 40$ (1)

$\frac{1}{8}(x + y) = 11 \Leftrightarrow x + y = 88$ (2)

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x - y = 40 \\ \underline{x + y = 88} \\ 2x = 128; \end{array}$$

$\therefore$ $x = 64$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene:

$64 + y = 88;$

$\therefore$ $y = 24$ {restando 64 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 24 y 64.

2. La suma de dos números es 190 y $\frac{1}{9}$ de su diferencia es 2. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$x + y = 190$ (1)

$\frac{1}{9}(x - y) = 2 \Leftrightarrow x - y = 18$ (2)

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x + y = 190 \\ \underline{x - y = 18} \\ 2x = 208; \end{array}$$

$\therefore$ $x = 104$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$104 + y = 190;$

$\therefore$ $y = 86$ {restando 104 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 104 y 86.

3. La suma de dos números es 1529 y su diferencia 101. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$x + y = 1529$ (1)

$x - y = 101$ (2)

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x + y = 1529 \\ \underline{x - y = 101} \\ 2x = 1630; \end{array}$$

$\therefore$ $x = 815$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$815 + y = 1529;$

$\therefore$ $y = 714$ {restando 815 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 815 y 714.

4. Un cuarto de la suma de dos números es 45 y un tercio de su diferencia es 4. Hallar los números.

<u>Solución</u>:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$$\frac{1}{4}(x+y)=45 \Leftrightarrow x+y=180 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{3}(x-y)=4 \Leftrightarrow x-y=12 \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x+y=180 \\ \underline{x-y=\ \ 12} \\ 2x \qquad =192; \end{array}$$

$\therefore \quad x=96$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$96+y=180;$

$\therefore \quad y=84$ {restando 96 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números buscados son 84 y 96.

5. Los 2/3 de la suma de dos números son 74 y los 3/5 de su diferencia 9. Hallar los números.

<u>Solución</u>:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$$\frac{2}{3}(x+y)=74 \Leftrightarrow 2x+2y=222 \Leftrightarrow x+y=111 \qquad (1)$$

$$\frac{3}{5}(x-y)=9 \Leftrightarrow 3x-3y=45 \Leftrightarrow x-y=15 \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x+y=111 \\ \underline{x-y=\ \ 15} \\ 2x \qquad =126; \end{array}$$

$\therefore \quad x=63$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$63+y=111;$

$\therefore \quad y=48$ {restando 63 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 63 y 48.

6. Los 3/10 de la suma de dos números exceden en 6 a 39 y los 5/6 de su diferencia son 1 menos que 26. Hallar los números.

<u>Solución</u>:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$$\frac{3}{10}(x+y)-6=39 \Leftrightarrow 3(x+y)-60=390 \Leftrightarrow 3x+3y=450 \Leftrightarrow x+y=150 \qquad (1)$$

$$\frac{5}{6}(x-y)=26-1 \Leftrightarrow \frac{5}{6}(x-y)=25 \Leftrightarrow \frac{1}{6}(x-y)=5 \Leftrightarrow x-y=30 \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{ll} x+y= & 150 \\ \underline{x-y=} & \underline{30} \\ 2x \quad = & 180; \end{array}$$

$\therefore \quad x=90 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$90+y=150;$

$\therefore \quad y=60 \quad$ {restando90 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 90 y 60.

7. Un tercio de la diferencia de dos números es 11 y los 4/9 del mayor equivalen a los 3/4 del menor. Hallar los números.

<u>Solución</u>:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$$\frac{1}{3}(x-y)=11 \Leftrightarrow x-y=33 \qquad (1)$$

$$\frac{4}{9}x=\frac{3}{4}y \Leftrightarrow 16x=27y \Leftrightarrow 16x-27y=0 \qquad (2)$$

Multiplicamos (1) por -27 y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{lll} -27x+27y= & -891 & (3) \\ \underline{16x-27y=} & \underline{0} & (2) \\ -11x \quad = & -891; & \end{array}$$

$\therefore \quad x=81 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -11} (4)

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene:

$81-y=33;$

$\Rightarrow \quad -y=-48 \quad$ {restando 81 en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad y=48 \quad$ {multiplicando cada miembro de la ecuación por -1}.

Respuesta: los números son 81 y 48.

9. Hallar dos números tales que 5 veces el mayor exceda a 1/5 del menor en 222 y 5 veces el menor exceda a 1/5 del mayor en 66.

Solución:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$$5x = \frac{1}{5}y + 222 \Leftrightarrow 25x - y = 1110 \qquad (1)$$

$$5y = \frac{1}{5}x + 66 \Leftrightarrow x - 25y = -330 \qquad (2)$$

Multiplicamos (2) por -25 y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (1):

$$\begin{array}{rcl} -25x + 625y &=& 8250 \qquad (3) \\ 25x \quad - y &=& 1110 \qquad (2) \\ \hline 624y &=& 9360; \end{array}$$

$\therefore \quad y = 15 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 624} (4)

Sustitiuyendo (4) en (2), se obtiene:

$$x - 25(15) = -330 \Leftrightarrow x - 375 = -330;$$

$\therefore \quad x = 45 \quad$ {sumando 375 en ambos miembros de la ecuación}.

Respuesta: los números buscados son 15 y 45.

1. La diferencia de dos números es 40 y 1/8 de su suma es 11. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$x - y = 40$ (1)

$\frac{1}{8}(x+y) = 11 \Leftrightarrow x + y = 88$ (2)

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x - y = 40 \\ \underline{x + y = 88} \\ 2x \quad = 128; \end{array}$$

$\therefore$ $x = 64$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene:

$64 + y = 88;$

$\therefore$ $y = 24$ {restando 64 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 24 y 64.

2. La suma de dos números es 190 y $\frac{1}{9}$ de su diferencia es 2. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$x + y = 190$ (1)

$\frac{1}{9}(x-y) = 2 \Leftrightarrow x - y = 18$ (2)

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x + y = 190 \\ \underline{x - y = 18} \\ 2x \quad = 208; \end{array}$$

$\therefore$ $x = 104$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$104 + y = 190;$

$\therefore$ $y = 86$ {restando 104 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 104 y 86.

3. La suma de dos números es 1529 y su diferencia 101. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$x + y = 1529$ (1)

$x - y = 101$ (2)

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x + y = 1529 \\ \underline{x - y = 101} \\ 2x \quad = 1630; \end{array}$$

$\therefore$ $x = 815$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$815 + y = 1529;$

$\therefore$ $y = 714$ {restando 815 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 815 y 714.

4. Un cuarto de la suma de dos números es 45 y un tercio de su diferencia es 4. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$$\frac{1}{4}(x+y)=45 \Leftrightarrow x+y=180 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{3}(x-y)=4 \Leftrightarrow x-y=12 \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x+y=180 \\ \underline{x-y=\ \ 12} \\ 2x \qquad = 192; \end{array}$$

$\therefore \quad x=96 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustitiuyendo (3) en (1), se obtiene:

$96+y=180;$

$\therefore \quad y=84 \quad$ {restando 96 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números buscados son 84 y 96.

5. Los 2/3 de la suma de dos números son 74 y los 3/5 de su diferencia 9. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$$\frac{2}{3}(x+y)=74 \Leftrightarrow 2x+2y=222 \Leftrightarrow x+y=111 \qquad (1)$$

$$\frac{3}{5}(x-y)=9 \Leftrightarrow 3x-3y=45 \Leftrightarrow x-y=15 \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x+y=111 \\ \underline{x-y=\ \ 15} \\ 2x \qquad = 126; \end{array}$$

$\therefore \quad x=63 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustitiuyendo (3) en (1), se obtiene:

$63+y=111;$

$\therefore \quad y=48 \quad$ {restando 63 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 63 y 48.

6. Los 3/10 de la suma de dos números exceden en 6 a 39 y los 5/6 de su diferencia son 1 menos que 26. Hallar los números.

<u>Solución</u>:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$$\frac{3}{10}(x+y)-6=39 \Leftrightarrow 3(x+y)-60=390 \Leftrightarrow 3x+3y=450 \Leftrightarrow x+y=150 \qquad (1)$$

$$\frac{5}{6}(x-y)=26-1 \Leftrightarrow \frac{5}{6}(x-y)=25 \Leftrightarrow \frac{1}{6}(x-y)=5 \Leftrightarrow x-y=30 \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} x+y &=& 150 \\ x-y &=& 30 \\ \hline 2x &=& 180; \end{array}$$

$\therefore \quad x=90 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (3)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$90+y=150;$

$\therefore \quad y=60 \quad$ {restando90 en ambos miembros de la ecuación}

Respuesta: los números son 90 y 60.

7. Un tercio de la diferencia de dos números es 11 y los 4/9 del mayor equivalen a los 3/4 del menor. Hallar los números.

<u>Solución</u>:

Sea

x: # mayor

y: # menor

De tal manera que:

$$\frac{1}{3}(x-y)=11 \Leftrightarrow x-y=33 \qquad (1)$$

$$\frac{4}{9}x=\frac{3}{4}y \Leftrightarrow 16x=27y \Leftrightarrow 16x-27y=0 \qquad (2)$$

Multiplicamos (1) por -27 y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{rcl} -27x+27y &=& -891 \quad (3) \\ 16x-27y &=& 0 \quad (2) \\ \hline -11x &=& -891; \end{array}$$

$\therefore \quad x=81 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -11} (4)

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene:

$81-y=33;$

$\Rightarrow \quad -y=-48 \quad$ {restando 81 en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad y=48 \quad$ {multiplicando cada miembro de la ecuación por -1}.

Respuesta: los números son 81 y 48.

9. Hallar dos números tales que 5 veces el mayor exceda a 1/5 del menor en 222 y 5 veces el menor exceda a 1/5 del mayor en 66.

<u>Solución</u>:

Sea

x : # mayor

y : # menor

De tal manera que:

$$5x = \frac{1}{5}y + 222 \Leftrightarrow 25x - y = 1110 \qquad (1)$$

$$5y = \frac{1}{5}x + 66 \Leftrightarrow x - 25y = -330 \qquad (2)$$

Multiplicamos (2) por − 25 y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (1):

$$\begin{array}{rrl} -25x + 625y = 8250 & & (3) \\ \underline{25x \qquad - y = 1110} & & (2) \\ 624y = 9360; & & \end{array}$$

$\therefore \quad y = 15 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 624} (4)

Sustituyendo (4) en (2), se obtiene:

$$x - 25(15) = -330 \Leftrightarrow x - 375 = -330;$$

$\therefore \quad x = 45 \quad$ {sumando 375 en ambos miembros de la ecuación}.

Respuesta: los números buscados son 15 y 45.

1. Si a los dos términos de una fracción se añade 1, el valor de la fracción es 2/3, y si a los dos términos se resta 1 el valor de la fracción es 1/2. Hallar la fracción.

<u>Solución</u>:

Sea

x: numerador de la fracción

y: denominador de la fracción

$\frac{x}{y}$: fracción buscada

De tal manera que:

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(x+1) = 2(y+1) \Leftrightarrow 3x+3 = 2y+2 \Leftrightarrow 3x-2y = -1 \qquad (1)$$

$$\frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-1) = (y-1) \Leftrightarrow 2x-2 = y-1 \Leftrightarrow 2x-y = 1 \qquad (2)$$

Multiplicamos (2) por -2, y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (1):

$$\begin{array}{rl} -4x+2y=-2 & (3) \\ 3x-2y=-1 & (1) \\ \hline -x \qquad =-3 & \end{array}$$

$\therefore \quad x = 3$ {multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1} (4)

Sustitiuyendo (4) en (2), se obtiene:

$2(3) - y = 1 \Leftrightarrow 6 - y = 1 \Leftrightarrow -y = -5;$

$\therefore \quad y = 5$ {multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1}

y $\quad \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$

Respuesta: la fracción buscada es $\frac{3}{5}$.

2. Si a los dos términos de una fracción se resta 3, el valor de la fracción es 1/3, y si los dos términos se aumentan , en 5 el valor de la fracción es 3/5. Hallar la fracción.

<u>Solución</u>:

Sea

x: numerador de la fracción

y: denominador de la fracción

$\frac{x}{y}$: fracción buscada

De tal manera que:

$$\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x-3) = (y-3) \Leftrightarrow 3x-9 = y-3 \Leftrightarrow 3x-y = 6 \qquad (1)$$

$$\frac{x+5}{y+5} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5(x+5) = 3(y+5) \Leftrightarrow 5x+25 = 3y+15 \Leftrightarrow 5x-3y = -10 \qquad (2)$$

Multiplicamos (1) por -3, y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{rl} -9x+3y=-18 & (3) \\ 5x-3y=-10 & (2) \\ \hline -4x \qquad =-28 & \end{array}$$

$\therefore \quad x = 7$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -4} (4)

Sustitiuyendo (4) en (1), se obtiene:

$3(7) - y = 6 \Leftrightarrow 21 - y = 6 \Leftrightarrow -y = -15;$

$\therefore \quad y = 15$ {multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1}

y $\quad \frac{x}{y} = \frac{7}{15}$

Respuesta: la fracción buscada es $\frac{7}{15}$.

3. Si al numerador de una fracción se añade 5, el valor de la fracción es 2, y si al numerador se resta 2, el valor de la fracción es 1. Hallar la fracción.

<u>Solución</u>:

Sea

x: numerador de la fracción

y: denominador de la fracción

$\frac{x}{y}$: fracción buscada

De tal manera que:

$$\frac{x+5}{y} = 2 \Leftrightarrow x+5 = 2y \Leftrightarrow x-2y = -5 \qquad (1)$$

$$\frac{x-2}{y} = 1 \Leftrightarrow x-2 = y \Leftrightarrow x-y = 2 \qquad (2)$$

Restemos (1) de (2):

$$\begin{array}{rl} x - y = 2 & (2) \\ \underline{-x + 2y = 5} & (1) \\ y = 7 & (3) \end{array}$$

Sustitiuyendo (3) en (2), se obtiene:

$x - 7 = 2;$

$\therefore \quad x = 9 \qquad$ {sumando 7 en ambos miembros de la ecuación}

y $\quad \frac{x}{y} = \frac{9}{7}$

Respuesta: la fracción buscada es $\frac{9}{7}$.

4. Si el numerador de una fracción se aumenta en 26 el valor de la fracción es 3, y si el denominador se disminuye , en 4 el valor es 1. Hallar la fracción.

<u>Solución</u>:

Sea

x: numerador de la fracción

y: denominador de la fracción

$\frac{x}{y}$: fracción buscada

De tal manera que:

$$\frac{x+26}{y} = 3 \Leftrightarrow x+26 = 3y \Leftrightarrow x-3y = -26 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{y-4} = 1 \Leftrightarrow x = y-4 \Leftrightarrow x-y = -4 \qquad (2)$$

Restemos (1) de (2):

$$\begin{array}{rl} x - y = -4 & (2) \\ \underline{-x + 3y = 26} & (1) \\ 2y = 22; & \end{array}$$

$\therefore \quad y = 11 \qquad$ {didvidiendo ambos miembros de la ecuación por 2} $\qquad (3)$

Sustitiuyendo (3) en (2), se obtiene:

$x - 11 = -4;$

$\therefore \quad x = 7 \qquad$ {sumando 11 en ambos miembros de la ecuación}

y $\quad \frac{x}{y} = \frac{7}{11}$

Respuesta: la fracción buscada es $\frac{7}{11}$.

7. Si el numerador de una fracción se aumenta en 2/5, el valor de la fracción es 4/5; y si el numerador se disminuye en 4/5, el valor de la fracción es 2/5. Hallar la fracción.

Solución:

Sea

x: numerador de la fracción

y: denominador de la fracción

$\frac{x}{y}$: fracción buscada

De tal manera que:

$$\frac{x+\frac{2}{5}}{y}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{\frac{5x+2}{5}}{y}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{5x+2}{5y}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{5x+2}{y}=4 \Leftrightarrow 5x+2=4y \Leftrightarrow 5x-4y=-2 \quad (1)$$

$$\frac{x-\frac{4}{5}}{y}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\frac{5x-4}{5}}{y}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{5x-4}{5y}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{5x-4}{y}=2 \Leftrightarrow 5x-4=2y \Leftrightarrow 5x-2y=4 \quad (2)$$

Restemos (1) de (2):

$$\begin{array}{rl} 5x-2y=4 & \quad (2) \\ \underline{-5x+4y=2} & \quad (1) \\ 2y=6; & \end{array}$$

$\therefore \quad y=3 \quad$ {dividiendo cada término de la ecuación por 2} (3)

Sustitiuyendo (3) en (2), se obtiene:

$$5x-2(3)=4 \Leftrightarrow 5x-6=4 \Leftrightarrow 5x=10;$$

$\therefore \quad x=2 \quad$ {dividiendo cada término por 5}

y $\quad \frac{x}{y}=\frac{2}{3}$

Respuesta: la fracción buscada es $\frac{2}{3}$.

1. Dos números están en la relación de 5 a 6. Si el menor se aumenta en 2 y el mayor se disminuye en 6, la relación es de 9 a 8. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: numero menor

y: número mayor

$\frac{x}{y}=\frac{5}{6}$: relación de los números

De tal manera que:

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow 6x=5y \Leftrightarrow 6x-5y=0 \qquad (1)$$

$$\frac{x+2}{y-6}=\frac{9}{8} \Leftrightarrow 8(x+2)=9(y-6) \Leftrightarrow 8x+16=9y-54 \Leftrightarrow 8x-9y=-70 \qquad (2)$$

Multipliquemos (1) por 4 y (2) por -3 y, sumemos las ecuaciones resultantes, la (3) y la (4):

$$\begin{array}{rl} 24x\ -20y = \ \ \ 0 & (3) \\ \underline{-24x\ +27y = 210} & (4) \\ 7y = 210; & \end{array}$$

$\therefore \quad y=30 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 7} $\quad$ (5)

Sustituyendo (5) en (1), se obtiene:

$$6x-5(30)=0 \Leftrightarrow 6x-150=0 \Leftrightarrow 6x=150;$$

$\therefore \quad x=25 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 6}

Respuesta: los números buscados son 25 y 30.

2. La relación de dos números es de 2 a 3. Si el menor se aumenta en 8 y el mayor en 7, la relación es de 3 a 4. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: numero menor

y: número mayor

$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$: relación de los números

De tal manera que:

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x=2y \Leftrightarrow 3x-2y=0 \qquad (1)$$

$$\frac{x+8}{y+7}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(x+8)=3(y+7) \Leftrightarrow 4x+32=3y+21 \Leftrightarrow 4x-3y=-11 \qquad (2)$$

Multipliquemos (1) por 4 y (2) por -3 y, sumemos las ecuaciones resultantes, la (3) y la (4):

$$\begin{array}{rl} 12x\ -8y = \ 0 & (3) \\ \underline{-12x\ +9y = 33} & (4) \\ y = 33 & (5); \end{array}$$

Sustituyendo (5) en (1), se obtiene:

$$3x-2(33)=0 \Leftrightarrow 3x-66=0 \Leftrightarrow 3x=66;$$

$\therefore \quad x=22 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3}

Respuesta: los números buscados son 22 y 33.

3. Dos números son entre si como 9 es 10. Si el mayor se aumenta en 20 y el menor se disminuye en 15, el menor será al mayor como 3 es a 7. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: numero menor

y: número mayor

$\frac{x}{y} = \frac{9}{10}$: relación de los números

De tal manera que:

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow 10x = 9y \Leftrightarrow 10x - 9y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{x-15}{y+20} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 7(x-15) = 3(y+20) \Leftrightarrow 7x - 105 = 3y + 60 \Leftrightarrow 7x - 3y = 165 \qquad (2)$$

Multipliquemos (2) por -3 y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (1):

$$\begin{array}{rl} -21x + 9y = -495 & (3) \\ 10x - 9y = \quad 0 & (1) \\ \hline -11x \quad = -495; & \end{array}$$

$\therefore \quad x = 45$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -11} (4)

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene:

$$10(45) - 9y = 0 \Leftrightarrow 450 - 9y = 0 \Leftrightarrow -9y = -450;$$

$\therefore \quad y = 50$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -9}

Respuesta: los números buscados son 45 y 50.

4. Las edades de A y B están en la relación de 5 a 7. Dentro de 2 años la relación entre la edad de A y la de B será de 8 a 11. Hallar las edades actuales.

Solución:

Sea

x: edad actual de A

y: edad actual de B

$\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$: relación entre las edades actuales

De tal manera que:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow 7x = 5y \Leftrightarrow 7x - 5y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{x+2}{y+2} = \frac{8}{11} \Leftrightarrow 11(x+2) = 8(y+2) \Leftrightarrow 11x + 22 = 8y + 16 \Leftrightarrow 11x - 8y = -6 \qquad (2)$$

Multipliquemos (1) por -11 y (2) por 7 y, sumemos las ecuaciones resultantes, la (3) y la (4):

$$\begin{array}{rl} -77x + 55y = \quad 0 & (3) \\ 77x - 56y = -42 & (4) \\ \hline -y = -42; & \end{array}$$

$\therefore \quad y = 42$ (5);

Sustituyendo (5) en (1), se obtiene:

$$7x - 5(42) = 0 \Leftrightarrow 7x - 210 = 0 \Leftrightarrow 7x = 210;$$

$\therefore \quad x = 30$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 7}

Respuesta: actualmente A tiene 30 años de edad y B tiene 42 años.

Problemas sobre ecuaciones simultáneas

1. Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 4, y si 5 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 2 y el residuo 17. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: numero menor

y: número mayor

De tal manera que:

$$\frac{y}{x} = 2 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x} - \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{y-4}{x} = 2 \Leftrightarrow y - 4 = 2x \Leftrightarrow 2x - y = -4 \qquad (1)$$

$$\frac{5x}{y} = 2 + \frac{17}{y} \Leftrightarrow \frac{5x}{y} - \frac{17}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{5x-17}{y} = 2 \Leftrightarrow 5x - 17 = 2y \Leftrightarrow 5x - 2y = 17 \qquad (2)$$

Multipliquemos (1) por -2 y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{rl} -4x + 2y = 8 & (3) \\ 5x - 2y = 17 & (2) \\ \hline x \qquad = 25 & (4); \end{array}$$

Sustitiuyendo (4) en (1), se obtiene:

$$2(25) - y = -4 \Leftrightarrow 50 - y = -4 \Leftrightarrow -y = -54;$$

$\therefore \quad y = 54 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -1}

Respuesta: los números buscados son 25 y 54.

2. Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 3, y si 10 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 3 y el residuo 19. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: numero menor

y: número mayor

De tal manera que:

$$\frac{y}{x} = 3 \Leftrightarrow y = 3x \Leftrightarrow 3x - y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{10x}{y} = 3 + \frac{19}{y} \Leftrightarrow \frac{10x}{y} - \frac{19}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{10x-19}{y} = 3 \Leftrightarrow 10x - 19 = 3y \Leftrightarrow 10x - 3y = 19 \qquad (2)$$

Multipliquemos (1) por -3 y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{rl} -9x + 3y = 0 & (3) \\ 10x - 3y = 19 & (2) \\ \hline x \qquad = 19 & (4); \end{array}$$

Sustitiuyendo (4) en (1), se obtiene:

$$3(19) - y = 0 \Leftrightarrow 57 - y = 0 \Leftrightarrow -y = -57;$$

$\therefore \quad y = 57 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por -1}

Respuesta: los números buscados son 19 y 57.

3. Si el duplo del mayor de dos números se divide por el triplo del menor, el cociente es 1 y el residuo 3, y si 8 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 5 y el residuo 1. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: numero menor

y: número mayor

De tal manera que:

$$\frac{2y}{3x} = 1 + \frac{3}{3x} \Leftrightarrow \frac{2y}{3x} - \frac{3}{3x} = 1 \Leftrightarrow \frac{2y-3}{3x} = 1 \Leftrightarrow 2y - 3 = 3x \Leftrightarrow 3x - 2y = -3 \qquad (1)$$

$$\frac{8x}{y} = 5 + \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{8x}{y} - \frac{1}{y} = 5 \Leftrightarrow \frac{8x-1}{y} = 5 \Leftrightarrow 8x - 1 = 5y \Leftrightarrow 8x - 5y = 1 \qquad (2)$$

Multipliquemos (1) por -8 y (2) por 3, y sumemos las ecuaciones resultantes, la (3) y la (4):

$$\begin{array}{rl} -24x + 16y = 24 & (3) \\ 24x - 15y = 3 & (4) \\ \hline y = 27 & (5); \end{array}$$

Sustitiuyendo (5) en (1), se obtiene:

$$3x - 2(27) = -3 \Leftrightarrow 3x - 54 = -3 \Leftrightarrow 3x = 51;$$

$\therefore \quad x = 17 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 3}

Respuesta: los números buscados son 17 y 27.

4. La edad de A excede en 22 años a la edad de B, y si la edad de A se divide entre el triplo de la de B, el cociente es 1 y el residuo 12. Hallar ambas edades.

Solución:

Sea

x: edad de A

y: edad de B

De tal manera que:

$$x - y = 22 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{3y} = 1 + \frac{12}{3y} \Leftrightarrow \frac{x}{3y} - \frac{12}{3y} = 1 \Leftrightarrow \frac{x-12}{3y} = 1 \Leftrightarrow x - 12 = 3y \Leftrightarrow x - 3y = 12 \qquad (2)$$

Restemos (2) de (1):

$$\begin{array}{rl} x - y = 22 & (3) \\ -x + 3y = -12 & (2) \\ \hline 2y = 10 \Leftrightarrow y = 5 & (4); \end{array}$$

Sustitiuyendo (4) en (1), se obtiene:

$$x - 5 = 22 \Leftrightarrow x = 27;$$

Respuesta: la edad de A es de 27 años y la de B de 5 años.

5. Seis veces el ancho de una sala excede en 4 m. a la longitud de la sala, y si la longitud aumentada en 3m. se divide entre el ancho, el cociente es 5 y el residuo 3. Hallar las dimensiones de la sala.

Solución:

Sea

x: ancho de la sala

y: longitud de la sala

De tal manera que:

$$6x - y = 4 \qquad (1)$$

$$\frac{y+3}{x} = 5 + \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{y+3}{x} - \frac{3}{x} = 5 \Leftrightarrow \frac{y+3-3}{x} = 5 \Leftrightarrow y = 5x \Leftrightarrow 5x - y = 0 \qquad (2)$$

Restemos (2) de (1):

$$\begin{array}{rl} 6x - y = 4 & (1) \\ \underline{-5x + y = 0} & (3) \\ x \quad\; = 4 & (5); \end{array}$$

Sustitiuyendo (5) en (1), se obtiene:

$$6(4) - y = 4 \Leftrightarrow 24 - y = 4 \Leftrightarrow y = 20;$$

Respuesta: la sala tiene las siguientes dimensiones 4 m. de ancho por 20 m. de largo.

1. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 12, y si al número se resta 18, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$10y + x$: # con las cifras invertidas

De tal manera que:

$x + y = 12 \qquad (1)$

$10x + y - 18 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = 18 \Leftrightarrow x - y = 2 \qquad (2)$

Sumemos (1) y (2):

$$\begin{array}{rl} x + y = 12 & (1) \\ \underline{x - y = \ \ 2} & (2) \\ 2x \quad = 14 \Leftrightarrow x = 7 & (3); \end{array}$$

Sustitiuyendo (3) en (1), se obtiene:

$7 + y = 12 \Leftrightarrow y = 5.$

$y \qquad 10x + y = 10(7) + 5 = 70 + 5 = 75$

Respuesta: el número buscado es 75.

2. La suma de las dos cifras de un número es 14, y si al número se suma 36, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$10y + x$: # con las cifras invertidas

De tal manera que:

$x + y = 14 \qquad (1)$

$10x + y + 36 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = -36 \Leftrightarrow x - y = -4 \qquad (2)$

Sumemos (1) y (2):

$$\begin{array}{rl} x + y = \ \ 14 & (1) \\ \underline{x - y = -4} & (2) \\ 2x \quad = 10 \Leftrightarrow x = 5 & (3); \end{array}$$

Sustitiuyendo (3) en (1), se obtiene:

$5 + y = 14 \Leftrightarrow y = 9.$

$y \qquad 10x + y = 10(5) + 9 = 50 + 9 = 59$

Respuesta: el número buscado es 59.

3. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 13, y si al número se resta 45, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$10y + x$: # con las cifras invertidas

De tal manera que:

$$x + y = 13 \qquad (1)$$

$$10x + y - 45 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = 45 \Leftrightarrow x - y = 5 \qquad (2)$$

Sumemos (1) y (2):

$$\begin{array}{rl} x + y = 13 & (1) \\ \underline{x - y = \ 5} & (2) \\ 2x \quad = 18 \Leftrightarrow x = 9 & (3); \end{array}$$

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$$9 + y = 13 \Leftrightarrow y = 4.$$

y $\qquad 10x + y = 10(9) + 4 = 90 + 4 = 94$

Respuesta: el número buscado es 94.

4. La suma de las dos cifras de un número es 11, y si el número se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 7 y el residuo 6. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$x + y$: suma de las cifras del número

De tal manera que:

$$x + y = 11 \qquad (1)$$

$$\frac{10x + y}{x + y} = 7 + \frac{6}{x + y} \Leftrightarrow \frac{10x + y}{x + y} - \frac{6}{x + y} = 7 \Leftrightarrow \frac{10x + y - 6}{x + y} = 7 \Leftrightarrow 10x + y - 6 = 7x + 7y$$

$$\Leftrightarrow 3x - 6y = 6 \Leftrightarrow x - 2y = 2 \qquad (2)$$

Restemos (2) de (1):

$$\begin{array}{rl} x \ + y = \ 11 & (1) \\ \underline{-x + 2y = -2} & (3) \\ 3y = \ 9 \Leftrightarrow y = 3 & (4); \end{array}$$

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene:

$$x + 3 = 11 \Leftrightarrow x = 8.$$

y $\qquad 10x + y = 10(8) + 3 = 80 + 3 = 83$

Respuesta: el número buscado es 83.

6. Si a un número de dos cifras se añade 9, las cifras se invierten; y si este número que resulta se divide entre 7, el cociente es 6 y el residuo 1. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$10y + x$: # con las cifras invertidas

De tal manera que:

$$10x + y + 9 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = -9 \Leftrightarrow -x + y = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{10y + x}{7} = 6 + \frac{1}{7} \Leftrightarrow 10y + x = 42 + 1 \Leftrightarrow x + 10y = 43 \qquad (2)$$

Sumemos (1) y (2):

$$\begin{array}{rl} -x + y = 1 & (1) \\ \underline{x + 10y = 43} & (2) \\ 11y = 44 \Leftrightarrow y = 4 & (3); \end{array}$$

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene:

$$x + 10(4) = 43 \Leftrightarrow x + 40 = 43 \Leftrightarrow x = 3.$$

$y \qquad 10x + y = 10(3) + 4 = 30 + 4 = 34$

Respuesta: el número buscado es el 34.

7. La suma de las dos cifras de un número es 9. Si la cifra de las decenas se aumenta en 1 y la cifra de las unidades se disminuye en 1, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: número buscado

$10y + x$: número con las cifras invertidas

De tal manera que:

$$x + y = 9 \qquad (1)$$

$$10(x+1) + (y-1) = 10y + x \Leftrightarrow 10x + 10 + y - 1 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = -9 \Leftrightarrow x - y = -1 \qquad (2)$$

Sumamos término a término las ecuaciones

$$\begin{array}{rl} x + y = 9 & (1) \\ \underline{x - y = -1} & (2) \\ 2x \quad = 8; & \end{array}$$

$\therefore \quad x = 4 \quad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (4)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$$4 + y = 9;$$

$\therefore \quad y = 5 \quad$ {restando 4 en ambos miembros de la ecuación}

y $\qquad 10(4) + 5 = 40 + 5 = 45$

Respuesta: el número buscado es el 45.

Problemas sobre ecuaciones simultáneas

1. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 12, y si al número se resta 18, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$10y + x$: # con las cifras invertidas

De tal manera que:

$x + y = 12 \qquad (1)$

$10x + y - 18 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = 18 \Leftrightarrow x - y = 2 \qquad (2)$

Sumemos (1) y (2):

$$\begin{array}{rl} x + y = 12 & (1) \\ \underline{x - y = \ 2} & (2) \\ 2x \quad = 14 \Leftrightarrow x = 7 & (3); \end{array}$$

Sustitiuyendo (3) en (1), se obtiene:

$7 + y = 12 \Leftrightarrow y = 5.$

$y \qquad 10x + y = 10(7) + 5 = 70 + 5 = 75$

Respuesta: el número buscado es 75.

2. La suma de las dos cifras de un número es 14, y si al número se suma 36, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$10y + x$: # con las cifras invertidas

De tal manera que:

$x + y = 14 \qquad (1)$

$10x + y + 36 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = -36 \Leftrightarrow x - y = -4 \qquad (2)$

Sumemos (1) y (2):

$$\begin{array}{rl} x + y = \ 14 & (1) \\ \underline{x - y = -4} & (2) \\ 2x \quad = 10 \Leftrightarrow x = 5 & (3); \end{array}$$

Sustitiuyendo (3) en (1), se obtiene:

$5 + y = 14 \Leftrightarrow y = 9.$

$y \qquad 10x + y = 10(5) + 9 = 50 + 9 = 59$

Respuesta: el número buscado es 59.

3. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 13, y si al número se resta 45, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$10y + x$: # con las cifras invertidas

De tal manera que:

$x + y = 13$ (1)

$10x + y - 45 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = 45 \Leftrightarrow x - y = 5$ (2)

Sumemos (1) y (2):

$$\begin{array}{ll} x + y = 13 & (1) \\ \underline{x - y = 5} & (2) \\ 2x = 18 \Leftrightarrow x = 9 & (3); \end{array}$$

Sustitiuyendo (3) en (1), se obtiene:

$9 + y = 13 \Leftrightarrow y = 4.$

y $10x + y = 10(9) + 4 = 90 + 4 = 94$

Respuesta: el número buscado es 94.

4. La suma de las dos cifras de un número es 11, y si el número se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 7 y el residuo 6. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$x + y$: suma de las cifras del número

De tal manera que:

$x + y = 11$ (1)

$$\frac{10x + y}{x + y} = 7 + \frac{6}{x + y} \Leftrightarrow \frac{10x + y}{x + y} - \frac{6}{x + y} = 7 \Leftrightarrow \frac{10x + y - 6}{x + y} = 7 \Leftrightarrow 10x + y - 6 = 7x + 7y$$

$\Leftrightarrow 3x - 6y = 6 \Leftrightarrow x - 2y = 2$ (2)

Restemos (2) de (1):

$$\begin{array}{ll} x + y = 11 & (1) \\ \underline{-x + 2y = -2} & (3) \\ 3y = 9 \Leftrightarrow y = 3 & (4); \end{array}$$

Sustitiuyendo (4) en (1), se obtiene:

$x + 3 = 11 \Leftrightarrow x = 8.$

y $10x + y = 10(8) + 3 = 80 + 3 = 83$

Respuesta: el número buscado es 83.

6. Si a un número de dos cifras se añade 9, las cifras se invierten; y si este número que resulta se divide entre 7, el cociente es 6 y el residuo 1. Hallar el número.

<u>Solución</u>:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: # buscado

$10y + x$: # con las cifras invertidas

De tal manera que:

$$10x + y + 9 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = -9 \Leftrightarrow -x + y = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{10y + x}{7} = 6 + \frac{1}{7} \Leftrightarrow 10y + x = 42 + 1 \Leftrightarrow x + 10y = 43 \qquad (2)$$

Sumemos (1) y (2):

$$\begin{array}{rl} -x + y = 1 & (1) \\ \underline{x + 10y = 43} & (2) \\ 11y = 44 \Leftrightarrow y = 4 & (3); \end{array}$$

Sustituyendo (3) en (2), se obtiene:

$$x + 10(4) = 43 \Leftrightarrow x + 40 = 43 \Leftrightarrow x = 3.$$

y $\qquad 10x + y = 10(3) + 4 = 30 + 4 = 34$

Respuesta: el número buscado es el 34.

7. La suma de las dos cifras de un número es 9. Si la cifra de las decenas se aumenta en 1 y la cifra de las unidades se disminuye en 1, las cifras se invierten. Hallar el número.

<u>Solución</u>:

Sea

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$10x + y$: número buscado

$10y + x$: número con las cifras invertidas

De tal manera que:

$$x + y = 9 \qquad (1)$$

$$10(x + 1) + (y - 1) = 10y + x \Leftrightarrow 10x + 10 + y - 1 = 10y + x \Leftrightarrow 9x - 9y = -9 \Leftrightarrow x - y = -1 \qquad (2)$$

Sumamos término a término las ecuaciones

$$\begin{array}{rl} x + y = 9 & (1) \\ \underline{x - y = -1} & (2) \\ 2x = 8; & \end{array}$$

$\therefore \qquad x = 4 \qquad$ {dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2} (4)

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$$4 + y = 9;$$

$\therefore \qquad y = 5 \qquad$ {restando 4 en ambos miembros de la ecuación}

y $\qquad 10(4) + 5 = 40 + 5 = 45$

Respuesta: el número buscado es el 45.

200

Problemas sobre ecuaciones simultáneas

1. Si A le da a B \$1, ambos tienen lo mismo, y si B le da a A \$1, A tendrá el triplo de lo que le quede a B. ¿Cuánto tiene cada uno?

Solución:

Sea

x: dinero que tiene A

y: dinero que tiene B

De tal manera que:

$x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow x - y = 2 \quad (1)$

$x + 1 = 3(y - 1) \Leftrightarrow x + 1 = 3y - 3 \Leftrightarrow x - 3y = -4 \quad (2)$

Restemos (2) de (1):

$$\begin{array}{rl} x - y = 2 & (1) \\ \underline{-x + 3y = 4} & (3) \\ 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3 & (4); \end{array}$$

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene:

$x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = 5.$

Respuesta: A tiene \$5 y B \$3.

2. Si B le da a A 2 soles, ambos tienen lo mismo, y si A le da a B 2 soles, B tendrá el doble de lo que le quede a A. ¿Cuánto tiene cada uno?

Solución:

Sea

x: dinero que tiene A, en soles

y: dinero que tiene B, en soles

De tal manera que:

$x + 2 = y - 2 \Leftrightarrow x - y = -4 \quad (1)$

$2(x - 2) = y + 2 \Leftrightarrow 2x - 4 = y + 2 \Leftrightarrow 2x - y = 6 \quad (2)$

Restemos (1) de (2):

$$\begin{array}{rl} -x + y = 4 & (3) \\ \underline{2x - y = 6} & (2) \\ x \quad = 10 & (4); \end{array}$$

Sustituyendo (4) en (3), se obtiene:

$-10 + y = 4 \Leftrightarrow y = 14.$

Respuesta: A tiene 10 soles y B 14 soles.

3. Si Pedro le da a Juan \$3, ambos tienen igual suma, pero si Juan le da a Pedro \$3, éste tiene 4 veces lo que le queda a Juan. ¿Cuánto tiene cada uno?

Solución:

Sea

x: dinero que tiene Pedro

y: dinero que tiene Juan

De tal manera que:

$$x - 3 = y + 3 \Leftrightarrow x - y = 6 \qquad (1)$$

$$x + 3 = 4(y - 3) \Leftrightarrow x + 3 = 4y - 12 \Leftrightarrow x - 4y = -15 \qquad (2)$$

Restemos (2) de (1):

$$\begin{array}{rl} x - y = 6 & (1) \\ \underline{-x + 4y = 15} & (3) \\ 3y = 21 \Leftrightarrow y = 7 & (4); \end{array}$$

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene:

$$x - 7 = 6 \Leftrightarrow x = 13.$$

Respuesta: Pedro tiene \$13 y Juan \$7.

4. Hace 10 años la edad de A era doble que la de B; dentro de 10 años la edad de B será los 3/4 de la de A. Hallar las edades actuales.

Solución:

Sea

x: edad actual de A

y: edad actual de B

$x - 10$: edad de A, hace 10 años

$y - 10$: edad de B, hace 10 años

$x + 10$: edad de A, dentro de 10 años

$y + 10$: edad de B, dentro de 10 años.

De tal manera que:

$$x - 10 = 2(y - 10) \Leftrightarrow x - 10 = 2y - 20 \Leftrightarrow x - 2y = -10 \qquad (1)$$

$$\frac{3}{4}(x + 10) = y + 10 \Leftrightarrow 3x + 30 = 4y + 40 \Leftrightarrow 3x - 4y = 10 \qquad (2)$$

Multipliquemos (1) por -2, y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{rl} -2x + 4y = 20 & (3) \\ \underline{3x - 4y = 10} & (2) \\ x = 30 & (4); \end{array}$$

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene:

$$30 - 2y = -10 \Leftrightarrow -2y = -40 \Leftrightarrow y = 20.$$

Respuesta: A tiene 30 años y B 20 años.

12. Hace 6 años la edad de Enrique era los 3/2 de la edad de su hermana; y dentro de 6 años, cuatro veces la edad de Enrique será 5 veces la edad de su hermana. Hallar las edades actuales.

Solución:

Sea

x: edad de Enrique

y: edad de *Patricia* (la hermana de Enrique)

De tal manera que:

$$x-6=\frac{3}{2}(y-6) \Leftrightarrow 2x-12=3y-18 \Leftrightarrow 2x-3y=-6 \qquad (1)$$

$$4(x+6)=5(y+6) \Leftrightarrow 4x+24=5y+30 \Leftrightarrow 4x-5y=6 \qquad (2)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por -2, y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{rcll} -4x+6y &=& 12 & (3) \\ 4x-5y &=& 6 & (2) \\ \hline y &=& 18 & (4) \end{array}$$

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene:

$$2x-3(18)=-6 \Leftrightarrow 2x-54=-6,$$

$\Rightarrow \quad 2x=48 \quad$ {sumando 54 en ambos miembros de la ecuación};

$\therefore \quad x=24 \quad$ {dividiendo ambos miembros por 2

Respuesta: actualmente Enrique tiene 24 años de edad y su hermana 18.

1. Un hombre rema río abajo 10 Km. en 1 hora y río arriba 4 Km. en 1 hora. Hallar la velocidad del bote e
tranquila y la velocidad del río.

Solución:

Sea

x: velocidad del bote en agua tranquila, en Km/h

y: velocidad del río, en Km/h

$x-y$: velocidad del bote contra la corriente, en Km/h

$x+y$: velocidad del bote en favor de la corriente, en Km/h

De tal manera que:

$$x+y=10 \quad (1)$$
$$x-y=4 \quad (2)$$

Sumemos (1) de (2):

$$\begin{array}{l} x+y=10 \\ \underline{x-y=\ 4} \\ 2x \quad = 14 \Leftrightarrow x=7 \quad (3); \end{array}$$

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$$7+y=10 \Leftrightarrow y=3.$$

Respuesta: la velocidad del bote en agua tranquila es de 7 Km/h y la del río de 3 Km/h.

2. Una tripulación rema 28 Km. en $1\frac{3}{4}$ horas río abajo y 24 Km. en 3 horas río arriba. Hallar la velocidad
en agua tranquila y la velocidad del río.

Solución:

Sea

x: velocidad del bote en agua tranquila, en Km/h

y: velocidad del río, en Km/h

$x-y$: velocidad del bote contra la corriente, en Km/h

$x+y$: velocidad del bote en favor de la corriente, en Km/h

$v=\dfrac{s}{t}$, donde v: velocidad, s: distancia recorrida, t: tiempo

$1\frac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{7}{4}$

De tal manera que:

$$x+y=\frac{28}{\frac{7}{4}} \Leftrightarrow x+y=16 \quad (1)$$

$$x-y=\frac{24}{3} \Leftrightarrow x-y=8 \quad (2)$$

Sumemos (1) de (2):

$$\begin{array}{l} x+y=16 \\ \underline{x-y=\ 8} \\ 2x \quad = 24 \Leftrightarrow x=12 \quad (3); \end{array}$$

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$$12+y=16 \Leftrightarrow y=4.$$

Respuesta: la velocidad del bote en agua tranquila es de 12 Km/h y la del río de 4 Km/h.

3. Un bote emplea 5 horas en recorrer 24 Km. río abajo y en regresar. En recorrer 3 Km río abajo emplea el mismo tiempo que en recorer 2 Km. río arriba. Hallar el tiempo empleado en ir y el empleado en volver.

S o l u c i ó n:

Sea

x: tiempo empleado en ir río abajo, en h.

y: tiempo empleado en ir río arriba, en h.

$x+y$: tiempo empleado en ir y volver, en h.

$\frac{24}{x}$: velocidad del bote a favor la corriente, en Km/h

$\frac{24}{y}$: velocidad del bote contra la corriente, en Km./h

Nota: $t=\frac{e}{v}$, donde t: tiempo, e: distancia (espacio) y v: velocidad.

$\frac{3}{\frac{24}{x}}=\frac{x}{8}$: tiempo empleado en recorrer 3 Km. río abajo

$\frac{2}{\frac{24}{y}}=\frac{y}{12}$: tiempo empleado en recorrer 2 Km. río arriba

De tal manera que:

$x+y=5$ (1)

$\frac{x}{8}=\frac{y}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3} \Leftrightarrow 3x-2y=0$ (2)

Multipliquemos a (1) por 2, y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{ll} 2x+2y=10 & (3) \\ \underline{3x-2y=0} & (2) \\ 5x \quad\quad =10 \Leftrightarrow x=2 & (4); \end{array}$$

Sustitiuyendo (4) en (1), se obtiene:

$2+y=5 \Leftrightarrow y=3.$

Respuesta: el bote emplea 2 h en ir río abajo y en volver 3 h.

4. Una tripulación emplea $2\frac{1}{2}$ horas en recorrer 40 Km. río abajo y 5 horas en el regreso. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.

S o l u c i ó n:

Sea

x: velocidad del bote en agua tranquila, en Km/h

y: velocidad del río, en Km/h

$x-y$: velocidad del bote contra la corriente, en Km/h

$x+y$: velocidad del bote en favor de la corriente, en Km/h

$v=\frac{s}{t}$, donde v: velocidad, s: distancia recorrida, t: tiempo

$2\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2}$

De tal manera que:

$x+y=\frac{40}{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x+y=16$ (1)

$x-y=\frac{40}{5} \Leftrightarrow x-y=8$ (2)

Sumemos (1) de (2):

$$\begin{array}{ll} x+y=16 & \\ \underline{x-y=\ 8} & \\ 2x \quad =24 \Leftrightarrow x=12 & (3); \end{array}$$

Sustitiuyendo (3) en (1), se obtiene:

$12+y=16 \Leftrightarrow y=4.$

Respuesta: la velocidad del bote en agua tranquila es de 12 Km/h y la del río de 4 Km/h.

6. Un bote emplea 5 horas en en recorrer 32 Km río abajo y 12 Km río arriba. En remar 4 Km río abajo el botero emplea el mismo tiempo que en remar 1 Km río arriba. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la del río.

Solución:

Sea

x: tiempo empleado en remar río arriba, en horas

$5-x$: tiempo empleado en remar río abajo, en horas

$32/(5-x)$: velocidad del bote río abajo, en Km/h

$12/x$: velocidad del bote río arriba, en Km/h

$\dfrac{4}{\dfrac{32}{5-x}} = \dfrac{5-x}{8}$: tiempo empleado en recorrer 4 Km río abajo

$\dfrac{1}{\dfrac{12}{x}} = \dfrac{x}{12}$: tiempo empleado en recorrer 1 Km río arriba

De tal manera que:

$$\frac{5-x}{8} = \frac{x}{12} \Leftrightarrow \frac{5-x}{2} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3(5-x) = 2x \Leftrightarrow 15-3x = 2x \Leftrightarrow 15 = 5x;$$

$\therefore$ $x = 3$ {tiempo empleado en remar río arriba} (1)

y $5-x = 2$ {tiempo empleado en remar río abajo} (2)

Ahora:

Sea y: velocidad del bote, en agua tranquila

z: velocidad del río, en agua tranquila

$y+z$: velocidad del bote a favor de la corriente (río abajo), en Km/h

$y-z$: velocidad del bote contra la corriente (río arriba), en Km/h

De tal modo que:

$y + z = 32/2 = 16$ (3)

$y - z = 2/3 = 4$ (4)

$2y = 20 \Leftrightarrow y = 10$ (5)

Sustituyendo (5) en (3), se obtiene:

$10 + z = 16 \Leftrightarrow z = 6$

Respuesta: la velocidad del bote, en agua tranquila, es de 10 Km/h, y la velocidad del río es de 6 Km/h.

202

Problemas sobre ecuaciones simultáneas

1. La suma de tres números es 37. El menor disminuido en 1 equivale a 1/3 de la suma del mayor y el mediano; la diferencia entre el mediano y el menor equivale al mayor disminuido en 13. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # menor

y: # mediano

z: # mayor

De tal manera que:

$$x+y+z=37 \qquad (1)$$

$$x-1=\frac{1}{3}(y+z) \Leftrightarrow 3x-3=y+z \Leftrightarrow 3x-y-z=3 \qquad (2)$$

$$y-x=z-13 \Leftrightarrow x-y+z=13 \qquad (3)$$

Sumemos (1) y (2):

$$\begin{array}{l} x+y+z=37 \\ \underline{3x-y-z=\ 3} \\ 4x \qquad\quad =40 \Leftrightarrow x=10 \qquad (4); \end{array}$$

Sumemos (1) y (3):

$$\begin{array}{l} x+y+z=37 \\ \underline{x-y+z=13} \\ 2x \quad +2z=50 \Leftrightarrow x+z=25 \qquad (5) \end{array}$$

Sustituyamos (4) en (5):

$$10+z=25 \Leftrightarrow z=15 \qquad (6)$$

Sustituyamos (5) y (6) en (1):

$$10+y+15=37 \Leftrightarrow y+25=37 \Leftrightarrow y=12$$

Respuesta: los números buscados son 10, 12 y 15.

2. 5 kilos de azúcar, 3 de café y 4 de frijoles cuestan \$1.18; 4 de azúcar, 5 de café y 3 de frijoles cuestan \$1.45; 2 de azúcar, 1 de café y 2 de frijoles cuestan 46 cts. Hallar el precio de un kilo de cada mercancia.

Solución:

Sea

x: precio de un kilo de azúcar

y: precio de un kilo de café

z: precio de un kilo de frijoles

$\$1.18 \Leftrightarrow 118$ cts., $\$1.45 \Leftrightarrow 145$ cts.

De tal manera que:

$$5x+3y+4z=118 \qquad (1)$$

$$4x+5y+3z=145 \qquad (2)$$

$$2x+y+2z=46 \qquad (3)$$

Multipliquemos (3) por -3, y la ecuación resultante, la (4), la sumamos con la (1):

$$\begin{array}{l} -6x-3y-6z=-138 \qquad (4) \\ \underline{\ \ 5x+3y+4z=\ \ 118} \qquad (1) \\ -x \qquad\ -2z=\ -20 \Leftrightarrow x+2z=20 \qquad (5) \end{array}$$

Multipliquemos (3) por -5, y la ecuación resultante, la (6), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{l} -10x-5y-10z=-230 \qquad (6) \\ \underline{\ \ 4x+5y\ +3z=\ \ 145} \qquad (2) \\ -6x \qquad\ -7z=\ -85 \Leftrightarrow 6x+7z=85 \qquad (7) \end{array}$$

Multipliquemos (5) por -6, y la ecuación resultante, la (8), la sumamos con la (7):

$$\begin{array}{l} -6x-12z=-120 \qquad (8) \\ \underline{\ \ 6x\ +7z=\ \ 85} \qquad (7) \\ \qquad -5z=\ -35 \Leftrightarrow z=7 \qquad (9) \end{array}$$

Sustituyendo (9) en (5), se obtiene:

$$x+2(7)=20 \Leftrightarrow x+14=20 \Leftrightarrow x=6 \qquad (10)$$

Sustituyendo (9) y (10) en (3), se obtiene:

$$2(6)+y+2(7)=46 \Leftrightarrow 12+y+14=46 \Leftrightarrow y+26=46 \Leftrightarrow y=20 \qquad (11)$$

Respuesta: un kilo de azúcar vale 6 cts., un kilo de café 20 cts. y un kilo de frijoles 7 cts.

3. La suma de las tres cifras de un número es 15. La suma de la cifra de las centenas con la cifra de las decenas es los 3/2 de la cifra de las unidades; y si al número se le resta 99, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las unidades

y: cifra de las decenas

z: cifra de las centenas

$100z + 10y + x$: número buscado

$100x + 10y + z$: número con las cifras invertdas

De tal manera que:

$$x + y + z = 15 \quad (1)$$

$$y + z = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2y + 2z = 3x \Leftrightarrow 3x - 2y - 2z = 0 \quad (2)$$

$$100z + 10y + x - 99 = 100x + 10y + z \Leftrightarrow 99x - 99z = -99 \Leftrightarrow x - z = -1 \quad (3)$$

Sumemos (1) y (3):

$$\begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ \underline{x \qquad - z = -1} \\ 2x + y \qquad = 14 \quad (4) \end{array}$$

Multipliquemos (3) por -2, y el resultdo lo sumamos con (2):

$$\begin{array}{l} -2x \qquad + 2z = 2 \\ \underline{\ \ 3x - 2y - 2z = 0} \\ \ \ x - 2y \qquad = 2 \quad (5) \end{array}$$

Multipliquemos (4) por 2, y el resultdo lo sumamos con (5):

$$\begin{array}{l} 4x + 2y = 28 \\ \underline{\ x - 2y = \ \ 2} \\ 5x \qquad = 30 \Leftrightarrow x = 6 \qquad \{\text{dividiendo ambos miembros de la ecuación por 5}\} \quad (6) \end{array}$$

Sustituimos (6) en (4):

$$2(6) + y = 14 \Leftrightarrow 12 + y = 14 \Leftrightarrow y = 2 \quad (7)$$

Sustituimos (6) en (3):

$$6 - z = -1 \Leftrightarrow z = 6 + 1 \Leftrightarrow z = 7$$

y $\quad 100(7) + 10(2) + 6 = 700 + 20 + 6 = 726$

Respuesta: el número buscado es 726.

4. La suma de las tres números es 127. Si a la mitad del menor se añade 1/3 del mediano y 1/9 del mayor, la suma es 39; y, el mayor excede en 4 unidades a la mitad de la suma del mediano y el menor. Hallar los números.

Solución:

Sea

x: # menor

y: # mediano

z: # mayor

De tal manera que:

$$x + y + z = 127 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{9}z = 39 \Leftrightarrow 9x + 6y + 2z = 702 \qquad (2)$$

$$z = \frac{x+y}{2} + 4 \Leftrightarrow 2z = x + y + 8 \Leftrightarrow x + y - 2z = -8 \qquad (3)$$

Sumemos (2) y (3):

$$\begin{array}{l} 9x + 6y + 2z = 702 \\ \underline{\;x \;\; + y - 2z = \;\; -8\;} \\ 10x + 7y \qquad = 694 \qquad (4); \end{array}$$

Multipliquemos (1) por 2 y , la ecuación resultante la sumamos con la (3):

$$\begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = 254 \\ \underline{\;x \;\; + y - 2z = \;\; -8\;} \\ 3x + 3y \qquad = 246 \qquad (5) \end{array}$$

Multipliquemos a (4) por -3 y a (5) por 7 y sumemos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{array}{l} -30x - 21y = -2082 \\ \underline{\;21x \;\; + 21y = \;\; 1722\;} \\ -9x \qquad = -360 \;\; \Leftrightarrow x = 40 \qquad (6) \end{array}$$

Sustituimos (6) en (5):

$$3(40) + 3y = 246 \Leftrightarrow 120 + 3y = 246 \Leftrightarrow 3y = 126 \Leftrightarrow y = 42 \qquad (7)$$

Sustituimos (6) y (7) en (1):

$$40 + 42 + z = 127 \Leftrightarrow z = 127 - 82 \Leftrightarrow z = 45$$

Respuesta: los números buscados son 40, 42 y 45.

5. La suma de las tres cifras de un número es 6. Si el número se divide por la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas, el cociente es 41, y si al número se le añade 198, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea x: cifra de las centenas

y: cifra de las decenas

z: cifra de las unidades

$100x+10y+z$: número buscado (♣)

$100z+10y+x$: número con las cifra invertidas

$x+y$: suma de la cifra de las centenas y de las decenas

De tal menra que:

$$x+y+z=6 \quad (1)$$

$$\frac{100x+10y+z}{x+y}=41 \Leftrightarrow 100x+10y+z=41(x+y) \Leftrightarrow 100x+10y+z=41x+41y \Leftrightarrow 59x-31y+z=0 \quad (2)$$

$$100x+10y+z+198=100z+10y+x \Leftrightarrow 99x-99z=-198 \Leftrightarrow x-z=-2 \quad (3)$$

Sumando (1) y (3), se obtiene:

$$\begin{array}{l} x+y+z=\ \ 6 \\ \underline{x \qquad -z=-2} \\ 2x+y \qquad = \ 4 \quad (4) \end{array}$$

Sumando (1) y (3), se obtiene:

$$\begin{array}{l} 59x-31y+z=\ \ 0 \\ \underline{\quad x \qquad\quad -z=-2} \\ 60x-31y \qquad =-2 \quad (5) \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación (4) por 31 y la ecuación resultante la sumamos con la (5):

$$\begin{array}{l} 62x+31y=124 \\ \underline{60x-31y=-2} \\ 122x \qquad =122 \Leftrightarrow x=1 \quad (6) \end{array}$$

Sustituyendo (6) en (4), se obtiene:

$$2(1)+y=4 \Leftrightarrow 2+y=4 \Leftrightarrow y=2 \quad (7)$$

Sustituyendo (6) en (3), se obtiene:

$$1-z=-2 \Leftrightarrow -z=-3 \Leftrightarrow z=3 \quad (8)$$

Por último, sustituyendo (6), (7) y (8) en (♣), se obtiene:

$$100(1)+10(2)+3=100+20+3=123$$

Respuesta: el número buscado es el 123.

12. Determinar un número entre 300 y 400 sabiendo que la suma de sus cifras es 6 y que leído al revés es $\frac{41}{107}$ del número primitivo.

Sea 3: cifra de las centenas {el número buscado está entre 300 y 400}

x: cifra de las decenas

y: cifra de las unidades

$300+10x+y$: número buscado (♠)

$100y+10x+3$: número leído al revés

De tal manera que:

$$3+x+y=6 \Leftrightarrow x+y=3 \quad (1)$$

$$100y+10x+3=\frac{41}{107}(300+10x+y) \Leftrightarrow 10700y+1070x+321=12300+410x+41y,$$

$\Rightarrow$ $660x+10659y=11979 \Leftrightarrow 20x+323y=363$ (2),

$\Rightarrow$ $20x+20y+303y=363$ {escribiendo la ecuación (2) en forma conveniente},

$\Rightarrow$ $20(x+y)+303y=363$ (3)

Sustituyendo (1) en (3), se obtiene:

$$20(3)+303y=363 \Leftrightarrow 60+303y=363 \Leftrightarrow 303y=303 \Leftrightarrow y=1 \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene:

$$x+1=3 \Leftrightarrow x=2 \quad (5)$$

Por último, sustituyendo (4) y (5) en (♠), se obtiene:

$$300+10(2)+1=300+20+1=321$$

Respuesta: el número buscado es el 321.

203

Miscelánea de problemas sobre ecuaciones simultáneas

1. El perímetro de un cuarto rectangular es 18 m., y 4 veces el largo equivale a 5 veces el ancho. Hallar las dimensiones del cuarto.

Solución:

Sea

x: ancho del cuarto

y: largo del cuarto

De tal manera que:

$$2x+2y=18 \Leftrightarrow x+y=9 \quad (1)$$

$$5x=4y \Leftrightarrow 5x-4y=0 \quad (2)$$

Multipliquemos (1) por 4, y la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{ll} 4x+4y=36 & (3) \\ \underline{5x-4y=\ \ 0} & (2) \\ 9x \qquad = 36 \Leftrightarrow x=4 & (4) \end{array}$$

Sustituyamos (4) en (1):

$$4+y=9 \Leftrightarrow y=5 \quad (5)$$

Respuesta: las dimensiones de la sala son 4 m. de ancho por 5 m. de largo.

2. A tiene doble dinero que B. Si A le da a B 12 balboas, ambos tendrán lo mismo. ¿Cuánto tiene cada uno?

Solución:

Sea

x: dinero de B, en balboas

$2x$: dinero de A, en balboas

$2x-12$: dinero que tendrá A si le diera 12 balboas a B

$x+12$: dinero que tendrá B cuando reciba las 12 balboas de A

De tal manera que:

$$2x-12 = x+12,$$

$\Rightarrow \quad 2x - x = 12+12 \quad$ {transponiendo};

$\therefore \quad x = 24 \quad$ {reduciendo}

y $\quad 2x = 2(24) = 48$

Respuesta: A tiene 48 y B 24 balboas.

3. Si una sala tuviera 1 metro más de largo y 1 metro más de ancho, el área sería 26 m^2 más de lo que es ahora, y si tuviera 3 metros menos de largo y 2 m más de ancho, el área sería 19 m^2 mayor que ahora. Hallar las dimensiones de la sala.

Solución:

Sea

x: ancho de la sala, en metros

y: largo de la sala, en metros

xy: área de la sala, en metros cuadrados

De tal manera que:

$$(x+1)(y+1) = xy+26 \Leftrightarrow xy+x+y+1 = xy+26 \Leftrightarrow x+y = 25 \quad (1)$$

y

$$(x+2)(y-3) = xy+19 \Leftrightarrow xy-3x+2y-6 = xy+19 \Leftrightarrow -3x+2y = 25 \quad (2)$$

Multilplicamos la ecuación (1) por 3 y, la ecuación resultante, la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{r} 3x+3y = 75 \\ \underline{-3x+2y = 25} \\ 5y = 100 \Leftrightarrow y = 20 \end{array} \quad \text{\{dividiendo cada miembro por 5\}} \quad (3),$$

$\Rightarrow \quad x+20 = 25 \quad$ {sustituyendo (3) en (1)};

$\therefore \quad x = 5 \quad$ {restando 20 en ambos miembros}

Respuesta: las dimensiones de la sala son 5 m de ancho por 20 m de largo.

4. Compré un carro, un caballo y sus arreos por $200. El carro y los arreos costaron $20 más que el caballo, y el caballo y los arreos costaron $40 más que el carro. ¿Cuánto costó el carro, cuánto el caballo y cuánto los arreos?

Solución:

Sea

x: costo del carro, en dólares

y: costo del caballo, en dólares

z: costo de los arreos, en dólares

De tal manera que:

$$x + y + z = 200 \quad (1)$$

y

$$x + z = y + 20 \Leftrightarrow x - y + z = 20 \quad (2)$$

y

$$y + z = x + 40 \Leftrightarrow -x + y + z = 40 \quad (3)$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (3), como también las ecuaciones (2) y (3):

$$\begin{array}{r} x + y + z = 200 \\ \underline{-x + y + z = \ \ 40} \\ 2y + 2z = 240 \Leftrightarrow y + z = 120 \quad (4) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{r} x - y + z = 20 \\ \underline{-x + y + z = 40} \\ 2z = 60 \Leftrightarrow z = 30 \quad (5), \end{array}$$

$\Rightarrow \quad y + 30 = 120 \qquad$ {sustituyendo (5) en (4)};

$\therefore \quad y = 90 \qquad$ {restando 30 en ambos miembros} $\quad (6)$

Por último, sustituyendo (5) y (6) en (1), se obtiene:

$$x + 90 + 30 = 200 \Leftrightarrow x = 80$$

Respuesta: el carro costó $80, el caballo $90 y los arreos $30.

5. Halar tres números tales que la suma del 1° y el 2° excede en 18 al tercero; la suma del 1° y el 3° excede en 78 al segundo, y la suma del 2° y el 3° excede en 102 al 1°.

Solución:

Sea

x: primer número

y: segundo número

z: tercer número

De tal manera que:

$$x + y = z + 18 \Leftrightarrow x + y - z = 18 \quad (1)$$

y

$$x + z = y + 78 \Leftrightarrow x - y + z = 78 \quad (2)$$

y

$$y + z = x + 102 \Leftrightarrow -x + y + z = 102 \quad (3)$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (3), como también las ecuaciones (2) y (3):

$$\begin{array}{r} x + y - z = 18 \\ \underline{-x + y + z = 102} \\ 2y \quad = 120 \Leftrightarrow y = 60 \quad (4) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{r} x - y + z = 78 \\ \underline{-x + y + z = 102} \\ 2z = 180 \Leftrightarrow z = 90 \quad (5), \end{array}$$

Por último, sustituyendo (5) y (6) en (2), se obtiene:

$$x - 60 + 90 = 78 \Leftrightarrow x = 48$$

Respuesta: los números buscados son, respectivamente, 48, 60 y 90.

6. La suma de las dos cifras de un número es 6, y si al número se le resta 36, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución:

Sea

x: cifra de las unidades

y: cifra de las decenas

$10y + x$: número buscado

$10x + y$: número con las cifras invertidas

De tal manera que:

$$x + y = 6 \quad (1)$$

y

$$10y + x - 36 = 10x + y \Leftrightarrow 9x - 9y = -36 \Leftrightarrow x - y = -4 \quad (2)$$

Sumamos (1) y (2):

$$\begin{array}{l} x + y = 6 \\ \underline{x - y = -4} \\ 2x \quad = 2 \Leftrightarrow x = 1 \quad (3), \end{array}$$

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$$1 + y = 6 \Leftrightarrow y = 5$$

y $\quad 10y + x = 10(5) + 1 = 51$

Respuesta: el número buscado es el 51.

7. Un pájaro, volando a favor del viento recorre 55 Km en 1 hora, y en contra del viento 25 Km en 1 hora. Hallar la velocidad, en Km por hora, del pájaro en aire tranquilo y la velocidad del viento .

Solución:

Sea

x: velocidad del pájaro en aire tranquilo, en Km/h

y: velocidad del viento, en Km/h

De tal manera que:

$x + y = 55 \quad (1)$

y

$x - y = 25 \quad (2)$

Sumamos (1) y (2):

$$\begin{array}{l} x + y = 55 \\ \underline{x - y = 25} \\ 2x \quad = 80 \Leftrightarrow x = 40 \quad (3), \end{array}$$

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene:

$40 + y = 55 \Leftrightarrow y = 15$

Respuesta: la velocidad del pájaro en aire tranquilo es de 40 Km/h, y la velocidad del viento es de 15 Km/h.

15. Cierto número de personas alquiló un ómnibus para una excursión. Si hubieran ido 10 personas más, cada una habría pagado 5 bolívares menos, y si hubieran ido 6 personas menos, cada una habría pagado 5 bolívares más. ¿Cuántas personas iban en la excursión y cuánto pagó cada una?

Solución:

Sea

x: # de personas que iban en la excursión

y: dinero que pagó cada una, en bolívares

xy: precio total del viaje

De tal manera que:

$(x + 10)(y - 5) = xy$ {el costo del alquiler del omnibús no varía},

$\Rightarrow$ $xy - 5x + 10y - 50 = xy$ {destruyendo paréntesis},

$\Rightarrow$ $-5x + 10y = 50$ {reduciendo};

$\therefore$ $-x + 2y = 10$ {dividiendo cada término de la ecuación por 5} (1)

$(x - 6)(y + 5) = xy$ {el costo del alquiler del ómnibus es constante},

$\Rightarrow$ $xy + 5x - 6y - 30 = xy$ {destruyendo paréntesis};

$\therefore$ $5x - 6y = 30$ {reduciendo} (2)

Multiplicamos (1) por 5 y, la ecuación resultante, la (3), la sumamos con la (2):

$$\begin{array}{ll} -5x + 10y = 50 & (3) \\ \underline{5x \ - 6y = 30} & (2) \\ \quad 4y = 80 \Leftrightarrow y = 20 & (4) \end{array}$$

Sustituyamos (4) en (1):

$-x + 2(20) = 10,$

$\Rightarrow$ $-x + 40 = 10 \Leftrightarrow -x = -30;$

$\therefore$ $x = 30$

Respuesta: en la excursión iban 30 personas y cada una pagó 20 bolívares.

Estudio elemental de la teoría coordinatoria

1. ¿Cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar con los números 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

Solución:

La fórmula para hallar las coordinaciones de m elementos tomados de n en n es:

$${}^{n}A_{m} = m(m-1)(m-2)\times\ldots\times(m-n+1) \quad (✚),$$

donde

$m = 6$: número de elementos distintos

$n = 3$: número de elementos que entran en cada grupo

De tal manera que:

$${}^{3}A_{6} = 6(6-1)\times\ldots\times(6-3+1) = 6\times5\times4 = 120$$

Respuesta: se pueden formar 120 números de 3 cifras distintos.

4. Entre Guaira y Liverpool hay 6 barcos haciendo los viajes. ¿De cuántos modos puede hacer el viaje de ida y de vuelta una persona si el viaje de vuelta debe hacerlo en un barco distinto del de ida?